Aabu



# Un zeste de trigonométrie

samedi 13 juillet 2024

# Table des matières

# Introduction

La trigonométrie peut rebuter, avec son jargon et ses formules. Si vous souhaitez comprendre ce que sont les cosinus, sinus et tangentes et vous approprier les formules pour vous en servir dans la pratique, notamment en sciences et en ingénierie, ce tutoriel est écrit pour vous !

Le parti pris de ce tutoriel est de partir de notions élémentaires simples et vous permettre ainsi de **reconnaître et manipuler les notions essentielles de la trigonométrie dans toutes les situations**, en vous aidant à acquérir la flexibilité et les méthodes pour être à l'aise même dans des cas s'éloignant de la simplicité des exercices.

# 1. Les angles et leur mesure

## Introduction

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il est important de voir ou se remémorer quelques notions sur les angles et comment on les mesure.

## 1.1. Angle et angle orienté

### 1.1.1. Exemples introductifs

Essayons de dégager une certaine intuition de ce qu'est un angle (ou un « coin ») à partir du langage courant.

Par exemple, quand on dit que quelque chose est « au coin de la rue » ou « à l'angle de telle et telle rue », on indique la zone entre deux rues qui se rejoignent (« le café au coin de la rue »). Similairement, « être dans l'angle d'une pièce » c'est se situer dans la zone où les deux murs se rejoignent.

Dans le langage courant, un « angle » est donc grossièrement l'espace qui se trouve à la jonction entre deux choses allongées.

### 1.1.2. Angle

Mathématiquement, un angle est l'espace entre deux côtés qui se rejoignent en un sommet. Le sommet est un point, et les côtés sont des demi-droites (ou segments) qui partent de ce sommet. On schématise cela comme dans la figure ci-dessous.

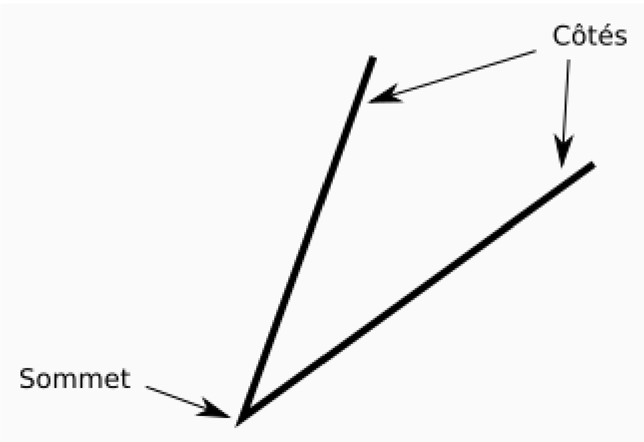


FIGURE 1.1. – Un angle dans son plus simple appareil.

En vérité, on a ici deux angles entre les deux côtés :

— l'angle intérieur, le plus petit, directement entre les deux côtés ;
— l'angle extérieur, le plus grand, faisant le tour par l'extérieur.

On s'intéresse le plus souvent à l'angle intérieur, mais pour éviter les ambigüités, on indique l'angle considéré en y dessinant un petit arc de cercle et en écrivant son nom à côté. Il n'y a alors plus besoin de préciser intérieur ou extérieur.

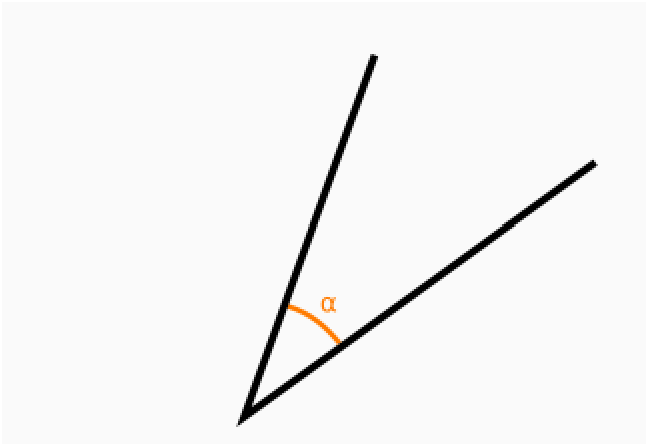



FIGURE 1.2. – Un angle désigné par son petit arc de cercle et nommé $\alpha$.

L'usage est de nommer les angles avec une seule lettre, souvent une lettre grecque. Les plus utilisées sont les suivantes :

— $\alpha$ : « alpha » ;
— $\beta$ : « bêta » ;
— $\gamma$ : « gamma » ;
— $\delta$ : « delta » ;
— $\theta$ : « thêta ».

### 1.1.3. Angle orienté

En trigonométrie, on a besoin de distinguer les deux côtés de l'angle en choisissant un côté qui sera le premier côté, l'autre étant le deuxième. On dit alors qu'on a affaire à des *angles orientés*.

Pour montrer cette orientation, on ajoute une petite flèche sur l'arc. Le petit arc de cercle qui désigne l'angle est alors une flèche qui part du premier côté pour arriver sur le deuxième côté.

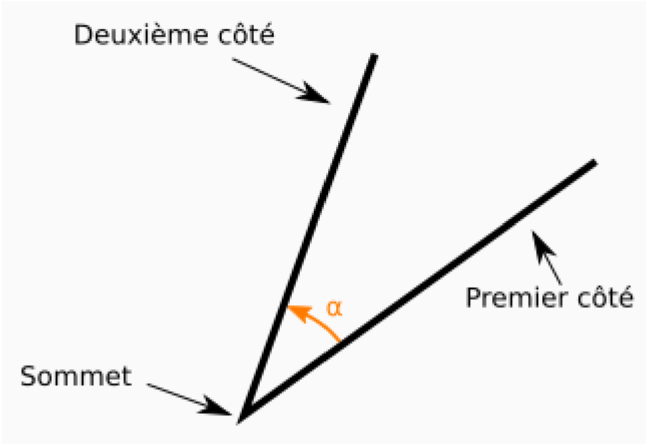



Figure 1.3. – Angle orienté. Notez bien que la flèche part du premier côté pour arriver au deuxième.

Ainsi, on peut avoir deux angles orientés qui utilisent les mêmes côtés et le même sommet. À part leur orientation, rien ne les distingue. On dit que ces deux angles sont des angles opposés.

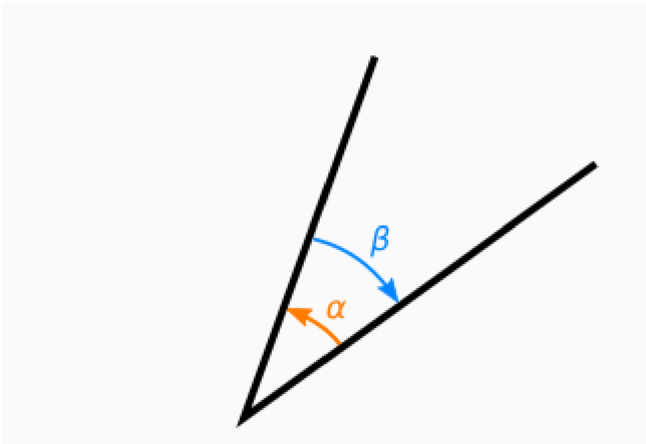



Figure 1.4. – Les angles $\alpha$ et $\beta$ sont opposés (même sommet et côtés, mais orientation différente).

En examinant, les petits arcs de cercle désignant les angles orientés, on voit qu'il tournent autour du sommet soit dans un sens soit dans l'autre. Les mathématiciens ont donné des noms aux deux sens de rotation différents possibles :

— le sens positif (parfois « sens trigonométrique ») désigne le sens *inverse* des aiguilles d'une montre ;
— le sens négatif (parfois « sens antitrigonométrique ») désigne le sens des aiguilles d'un montre.

Si vous n'avez pas de montre à aiguilles, le schéma ci-dessous devrait vous aider à visualiser les différents sens.

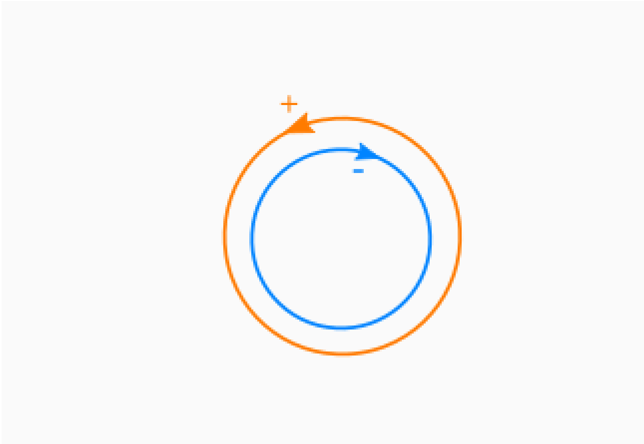



Figure 1.5. – Les deux sens possibles pour un angle orienté.

Sur le schéma précédent, $\alpha$ est orienté dans le sens positif et $\beta$ dans le sens négatif.

## 1.2. Mesure d'un angle orienté

### 1.2.1. Degrés

Très souvent, on mesure les angles en degrés. Un degré correspond à un 360e de tour. Autrement dit, quand on prend un cercle quelconque, et qu'on le découpe en 360 parts égales, chaque part correspond à un degré.

Mesurer un angle en degrés, cela revient à prendre un cercle quelconque centré sur le sommet de l'angle, le découper en 360 parts égales et mesurer la distance en degrés entre les deux côtés le long du cercle, c'est-à-dire le long de l'arc de cercle.

C'est exactement ce qu'on fait lors qu'on mesure un angle avec un rapporteur. Le rapporteur est en fait un cercle séparé en 360 graduations (ou un demi cercle séparé en 180 graduations). On le place centré sur le sommet, on aligne le zéro avec l'un des côtés et et on lit sur l'autre côté la mesure de l'angle.

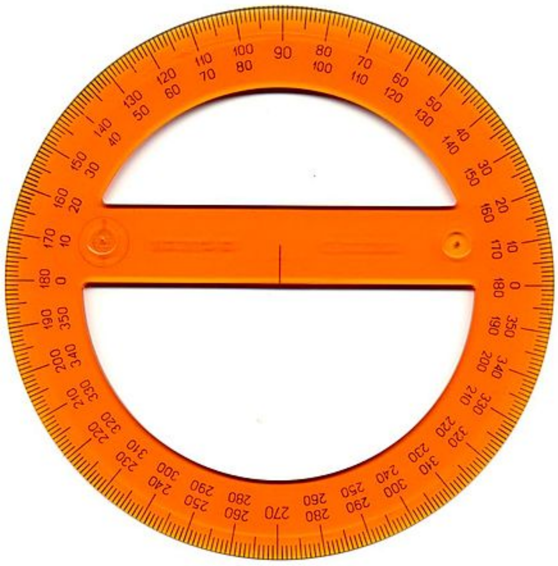


Figure 1.6. – Un rapporteur est un cercle découpé en 360 degrés (source ).

Pour avoir une mesure d'un angle *orienté*, il faut aussi prendre en compte l'orientation. C'est simple, si on mesure X° avec un rapporteur, un angle dans le sens positif aura pour mesure +X°, et -X° dans le sens négatif.

Avec les angles $\alpha$ et $\beta$ de la figure de la section précédente, on aurait $\alpha = 35°$ (car orienté positivement) et $\beta = -35°$ (car orienté négativement).

Souvent, quand on écrit une mesure sur un schéma, on n'indique pas le signe avec la mesure ; c'est la flèche qui le donne, comme montré dans la figure ci-dessous.

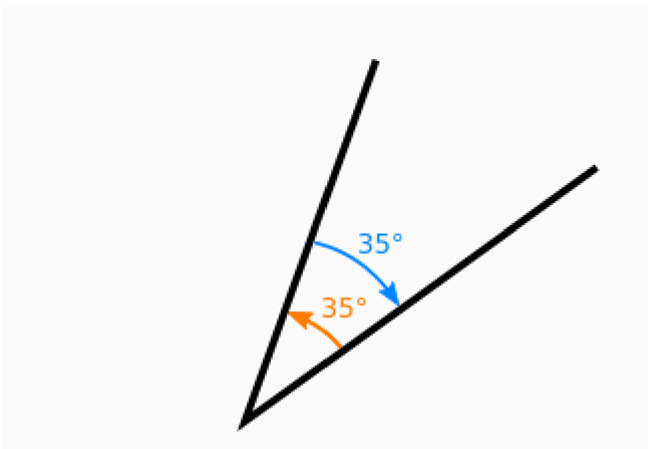



Figure 1.7. – Deux angles avec la même mesure absolue, mais de sens opposés.

### 1.2.2. Des degrés au radians

Avec les degrés, on a *choisi* de découper le cercle en 360 degrés. On peut tout à fait choisir un autre découpage ; c'est le principe derrière les radians.

L'idée des radians est de dire qu'un tour complet correspond à $2\pi$ (le fameux $\pi$ qui vaut environ 3,14). Ce choix est plus simple quand on fait des mathématiques, car il simplifie les formules. Dans notre cas, il n'y aura pas vraiment de simplification, mais il faudra faire attention à ne pas se tromper d'unité entre radians et degrés.

Le choix de $2\pi$ est justifié par le fait qu'il s'agisse du périmètre d'un cercle de rayon 1 ; les radians mesurent ainsi des longueurs d'arc sur le cercle de rayon 1.

Les radians fonctionnent en pratique exactement comme les degrés. Par exemple, un angle droit correspond à un quart de tour, soit $360°/4$, autrement dit $90°$. En radians, c'est toujours un quart de tour, c'est-à-dire $2\pi/4 = \pi/2$.

Les deux unités sont proportionnelles, ce qui permet des conversions faciles. Dans les deux formules ci-dessous, $\alpha_d$ désigne un angle en degrés et $\alpha_r$ un angle en radians.

$$\alpha_d = \alpha_r \times \frac{360°}{2\pi}$$

$$\alpha_r = \alpha_d \times \frac{2\pi}{360°}$$

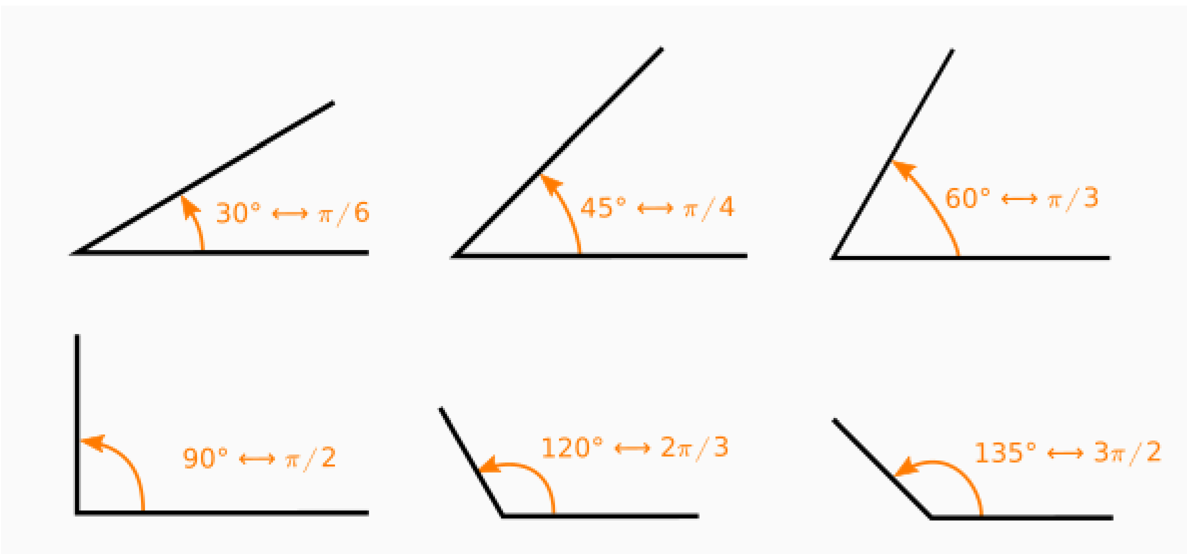



FIGURE 1.8. – Quelques angles et leurs mesures, en degrés et en radians.

Le symbole pour noter les radians est rad, mais souvent on ne l'écrit pas. Si vous voyez une mesure d'angle sans unité, surtout avec des $\pi$ qui traînent dedans, il s'agit avec quasi-certitude de radians. Vous remarquerez que j'ai déjà omis l'unité dans les paragraphes précédents.

Avec les radians, la mesure de l'angle a aussi un signe pour indiquer l'orientation : dans le sens positif, on aura +X rad, et dans le sens négatif, on aura -X rad.

# 2. Relations entre distances pour un angle aigu positif

## Introduction

Dans cette partie, on s'intéresse au cas particulier d'un angle aigu positif, c'est-à-dire un angle qui fait 90° ou moins et est orienté positivement. Ce qui est développé dans cette partie sera généralisé à tous les angles dans la partie suivante.

## 2.1. Projections orthogonales

Pour comprendre les sections suivantes, il est utile de faire un détour pour introduire les notions de projection et projection orthogonale.

Si on prend un point sur un côté d'un angle, il est possible de le *projeter* sur l'autre côté. Projeter un point d'un côté sur l'autre, cela consiste à prendre une droite passant par ce point et intersectant l'autre côté en un point qu'on appelle alors le *projeté* du premier point.

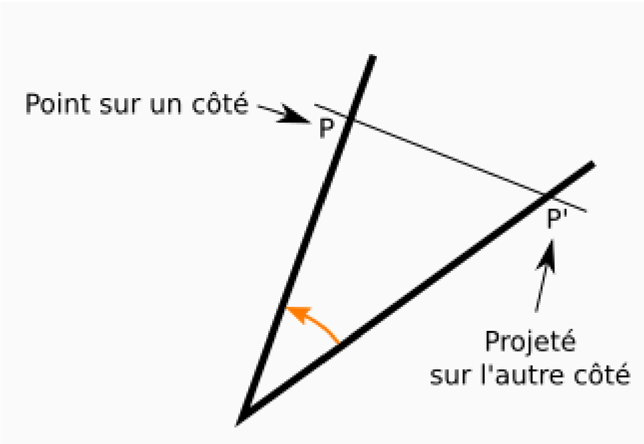



FIGURE 2.1. – Le point qu'on projette est P, le projeté est P'. La droite (PP') n'a rien de spécial, il s'agit d'un projeté quelconque.

Dans notre cas, nous nous intéresserons à une projection particulière : celle où le projeté est le plus proche possible du point qu'on projette. On appelle cela une *projection orthogonale*, car la droite de projection forme alors un angle droit avec le côté sur lequel le point se retrouve projeté.

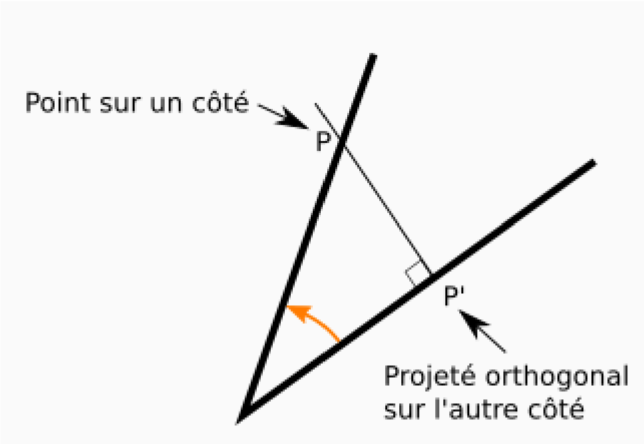



Figure 2.2. – Le point qu'on projette est P, le projeté est P'. La droite (PP') est perpendiculaire au côté sur lequel P' se trouve, P' est ainsi le projeté orthogonal de P.

!

Soyez attentifs : dans une projection orthogonale, le projeté est le point où se trouve l'angle droit et pas l'inverse !

## 2.2. Relations de proportionnalités et cosinus, sinus, tangente

### 2.2.1. Proportionnalité de longueurs dans un angle

Quand on fait une projection orthogonale, on voit que la distance entre un point et son projeté dépend de l'ouverture de l'angle et de la position du point d'origine. Cette distance mesure l'écartement de l'angle à une certaine distance du sommet. Plus un angle est ouvert, plus l'écartement sera grand à une distance donnée du sommet.

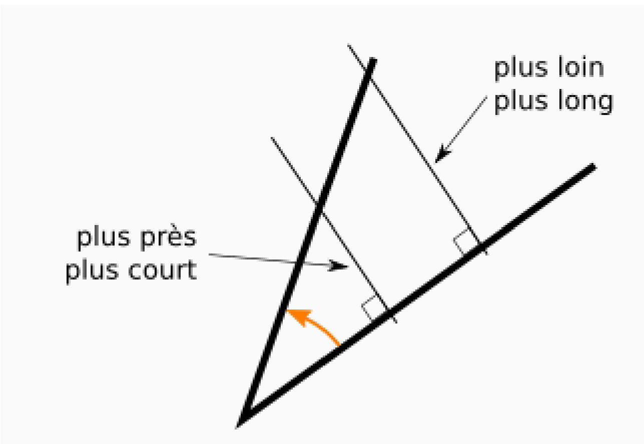



Figure 2.3. – La distance entre un point et son projeté augmente à mesure qu'on s'éloigne du sommet.

Plus précisément, pour un angle fixé, cet écart sera proportionnel à la distance au sommet. On a aussi d'autres relations de proportionnalité entre les différentes longueurs ainsi formées. C'est un cas particulier du théorème de Thalès.

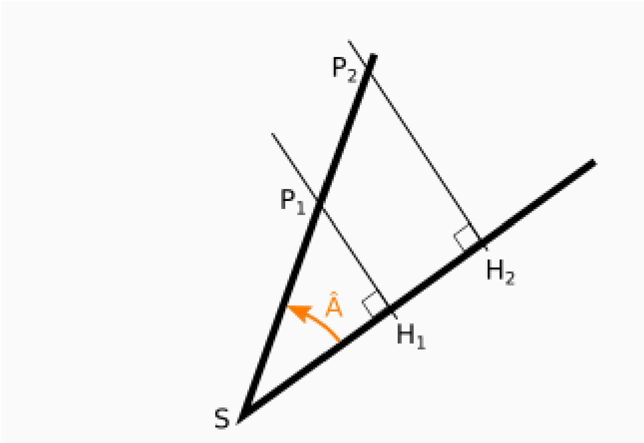



FIGURE 2.4. – Les longueurs respectent des relations de proportionnalité.

Ces relations de proportionnalité sont les suivantes :

$$\frac{SH_1}{SP_1} = \frac{SH_2}{SP_2}$$
$$\frac{H_1P_1}{SP_1} = \frac{H_2P_2}{SP_2}$$
$$\frac{H_1P_1}{SH_1} = \frac{H_2P_2}{SH_2}$$

## 2.2.2. Cosinus, sinus, tangente

Comme on parle tout le temps de ces relations de proportionnalité en trigonométrie, elles ont été nommées.

Pour un angle aigu positif, le rapport de la longueur $SH_1$ sur la longueur $SP_1$ est le cosinus de l'angle Â, noté $\cos \hat{A}$.

$$\cos = \frac{SH_1}{SP_1} = \frac{SH_2}{SP_2}$$

Pour un angle aigu positif, le rapport de la longueur $H_1P_1$ sur la longueur $SP_1$ est le sinus de l'angle Â.

$$\sin = \frac{H_1P_1}{SP_1} = \frac{H_2P_2}{SP_2}$$

Pour un angle aigu positif, le rapport de la longueur $H_1P_1$ sur le côté $SH_1$ est la tangente de l'angle Â.

$$\tan = \frac{H_1P_1}{SH_1} = \frac{H_2P_2}{SH_2}$$

Ces rapports sont fixes pour un angle de mesure donnée, en vertu de la proportionnalité. Notamment :

- peu importe quels points et projetés orthogonaux correspondants on choisit, la valeur sera la même ;
- deux angles de même mesure auront les mêmes sinus, cosinus et tangentes.

Notez bien que les définitions ici sont applicables seulement pour un angle aigu orienté positivement, mais nous généraliserons ça dans la partie suivante.

## 2.3. Triangle rectangle trigonométrique

En faisant un projeté orthogonal, on forme un triangle avec un angle droit, autrement dit un triangle rectangle.

Ce triangle rectangle est pratique comme synthèse pour se souvenir des définitions. Dans le cas d'un angle aigu orienté positivement, on peut en effet définir le cosinus, sinus et la tangente en fonction des cotés d'un triangle rectangle.

Quand on se focalise sur un angle en particulier, les côtés du triangle rectangle ont alors des désignations particulières :

- l'*hypoténuse* est le côté en face de l'angle droit,
- le *côté opposé* est le côté en face de l'angle qui nous intéresse ;
- le *côté adjacent* est le côté de l'angle où l'on trouve l'angle droit.

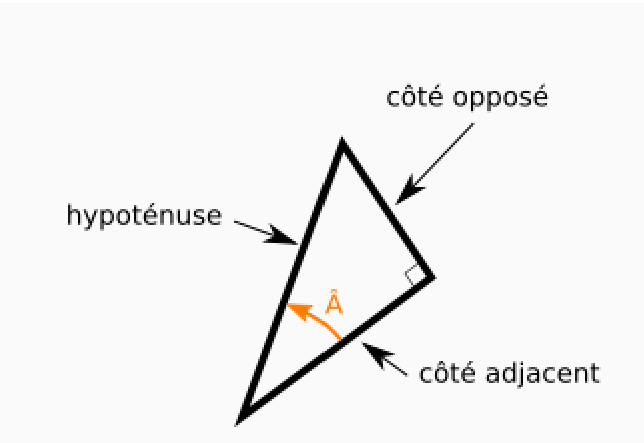



FIGURE 2.5. – Triangle rectangle et nom des côtés si on s'intéresse à l'angle Â.

Les définitions sont alors les suivantes :

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$$

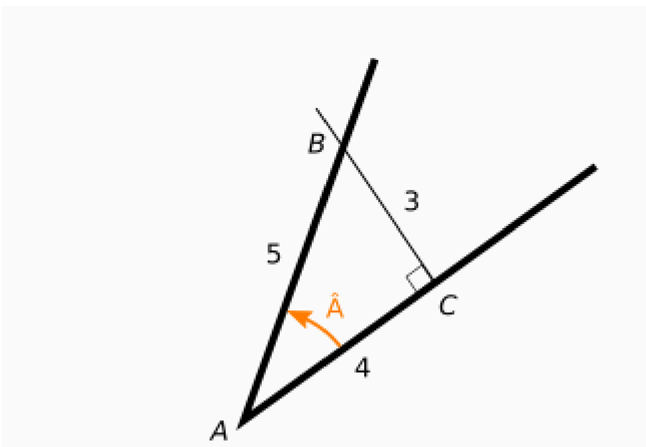
Souvent, on retient ces formules en retenant le mot CAHSOHTOA, qui sonne un peu comme « casse-toi ». On se remémore les formules avec les initiales, qui signifient : cosinus adjacent hypoténuse, sinus opposé hypoténuse, tangente opposé adjacent.

Retenez bien que le triangle rectangle est une manière de mieux *retenir* : le cosinus, sinus et tangente concernent les angles eux-mêmes, qu'un triangle rectangle ait été dessiné ou pas.

## 2.4. Applications

### 2.4.1. Calcul d'un cosinus, sinus et tangente à partir des distances

Calculons le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle Â de la figure ci-dessous. Les longueurs des côtés sont 3, 4 et 5 comme indiqués dans la figure ci-dessous.




Avant de foncer tête baissée, il est utile de bien s'assurer de comprendre en profondeur et vérifier la cohérence, surtout si on débute.

Déjà, les longueurs indiquées prouvent bien que l'angle en C est bien droit. En effet, d'après le théorème de Pythagore, $3^2 + 4^2 = 5^2$ prouve que le triangle est rectangle en C. On en déduit que C est le projeté orthogonal de B sur l'autre côté de l'angle Â. L'angle Â est aussi aigu et orienté positivement.

L'angle aigu positif et le triangle rectangle nous permettent d'appliquer les formules vues précédemment, avec la nomenclature suivante :

— l'hypoténuse du triangle ABC est $[AB]$, de longueur 5 ;
— le côté adjacent à Â est $[AC]$, de longueur 4 ;
— le côté opposé à Â est $[BC]$, de longueur 3.

Et donc d'après les formules de la section précédente :

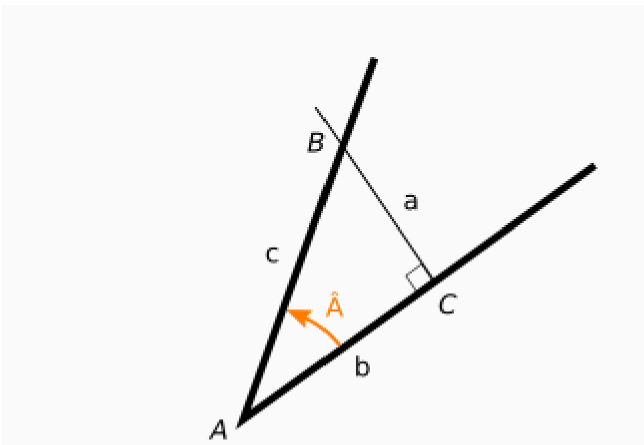
$$\cos \hat{A} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{3}{5}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{3}{4}$$

### 2.4.2. Calcul d'une distance à partir d'une autre distance et d'un angle

Procédons maintenant avec trois exemples permettant de calculer une distance en connaissant une distance et l'angle. La figure sera à chaque fois la suivante et nous ajusteront les mesures des côtés.




#### 2.4.2.1. Exemple 1

Supposons qu'on veuille calculer BC en connaissant :

— la mesure de Â,

$$; lalongueurdeAB, 8.$$

Si on se place dans le triangle ABC rectangle en C et qu'on considère l'angle Â, AB joue le rôle de l'hypoténuse et BC le rôle du côté opposé. On peut alors utiliser le sinus, qui relie ces deux valeurs. On sait ainsi que :

$$\sin = \frac{BC}{AB}$$

En isolant BC et en remplaçant Â par sa mesure, on en déduit que :

$$BC = AB \sin\frac{\pi}{6}$$

$\sin\frac{\pi}{6}$ est une valeur remarquable et vaut $\frac{1}{2}$ (on en reparlera plus tard) ! Finalement :

$$BC = \frac{AB}{2} = 4$$

Ce qui était la valeur recherchée.

#### 2.4.2.2. Exemple 2

Supposons qu'on veuille calculer AB en connaissant :

— la mesure de Â,

$$; la longueur de AC, 23.$$

Si on se place dans le triangle ABC rectangle en C et qu'on considère l'angle Â, AB joue le rôle de l'hypoténuse et AC le rôle du côté adjacent. On peut ainsi utiliser le cosinus, qui relie ces deux valeurs :

$$\cos = \frac{AC}{AB}$$

Similairement à l'exemple 1, on peut isoler ce qui nous intéresse :

$$AB = \frac{AC}{\cos}$$

Autrement dit, en remplaçant par les valeurs numériques :

$$AB = \frac{23}{\cos\frac{\pi}{12}}$$

Il est possible de calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$, mais elle n'est pas particulièrement simple. Il est tout de même possible de calculer une approximation de $AB$, à l'aide de la calculatrice. Je trouve :

$$AB \approx 23{,}8$$

#### 2.4.2.3. Exemple 3

Supposons qu'on veuille calculer AC en connaissant :

— la mesure de Â,

$$; la longueur de BC, 12.$$

Si on se place dans le triangle ABC rectangle en C et qu'on considère l'angle Â, BC joue le rôle du côté opposé et AC le rôle du côté adjacent. On peut ainsi utiliser la tangente, qui relie ces deux valeurs :

$$\tan = \frac{BC}{AC}$$

Le calcul est très similaire aux deux exemples précédents. tan se calcule de manière exacte , mais encore une fois, ce n'est pas particulièrement simple.

La valeur approchée qu'on trouve pour AC est :

$$AC \approx 16{,}5$$

Ce qu'il faut retenir de ces trois exemples, c'est qu'on peut jongler entre les distances connues pour retrouver les autres pour peu qu'on connaisse l'angle ! Il faut cependant toujours prendre soin de bien identifier l'angle droit et le rôle des différents côtés pour utiliser correctement les formules.

### 2.4.3. Utiliser sa calculatrice attentivement

Quand on utilise la calculatrice, il faut faire attention : par défaut, la calculatrice attend des angles en radians. C'est ce que nous avons fait dans les exemples précédents.

Mais imaginons que l'angle ait été donné en degré. Par exemple Â mesure 30°. Alors il faut surtout ne pas faire calculer à la calculatrice n'importe quoi. Par exemple :

$$\cos 30 \approx 0{,}15$$

Ici, il s'agit du cosinus d'un angle de 30 radians (ce n'est pas un angle aigu, nous y reviendrons).

Ce que l'on veut calculer, c'est en fait :

$$\cos 30° = \cos\left(30° \times \frac{\text{rad}}{180°}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \approx 0{,}87$$

Par défaut, les calculatrices vont calculer en radian et si vous avez un angle en degrés, il vous faudra le convertir auparavant. Certains outils ont des variantes qui acceptent les degrés (par exemple des fonctions cosd, sind, tand). D'autres outils encore, par exemple Wolfram Alpha vont essayer de deviner l'unité, et vous dire ce qu'ils ont choisi pour faire le calcul, pratique pour être sûr de son coup !

> ! En bref : lisez le manuel de votre calculatrice ou outil favori et soyez attentifs !

## Conclusion

Maintenant que nous avons vu les rapports trigonométriques dans le triangle, il est temps de passer à d'autres configuration d'angles qui ne forment pas des triangles de manière aussi évidente, tout en gardant les notions cohérentes.

# 3. Relations entre distances pour un angle quelconque

## Introduction

Dans la partie précédente, nous avons vu les formules du sinus, cosinus et tangente pour un angle aigu positif. Dans cette partie, l'objectif est de généraliser cela à tous les angles, autrement dit aux angles obtus ainsi qu'aux angles orientés négativement.

## 3.1. Configurations en termes de cadran

Pour commencer, il est important de passer un peu de temps à observer l'agencement des points intéressants, tel que le projeté d'un point sur l'autre côté, selon l'ouverture de l'angle. Ces observations nous seront utiles dans la section suivante, quand nous ferons la généralisation des formules vues dans la partie précédente.

Nous observerons la position relative d'un point sur un côté et de son projeté par rapport au sommet de l'angle et aux côtés. C'est une petiet gymnastique que vous aurez à faire en pratique, parce que rien ne dit que votre figure sera bien rangée avec le premier côté de l'angle horizontal sur votre feuille.

### 3.1.1. Angles positifs entre 0° et 90°

Il s'agit de la situation vue précédemment. Si on place le côté de l'angle horizontalement et qu'on fait pointer le premier côté vers la droite, le sommet étant à gauche, on peut faire les observations suivantes :

— le deuxième côté est *au-dessus* de la droite définie par le premier côté ;
— le projeté d'un point pris sur le deuxième côté se situe sur le premier côté, à *droite* du sommet.

> **!** Prenez bien conscience que ces placements sont relatifs. Il faut bien positionner le premier côté.

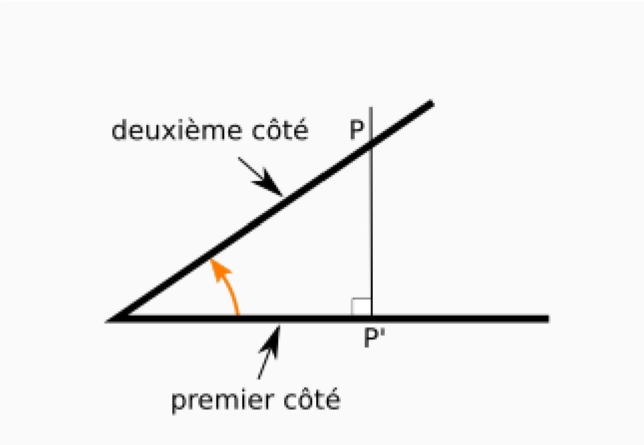



FIGURE 3.1. – Cas d'un angle positif entre 0° et 90° : deuxième côté au dessus du premier et projeté à droite du sommet.

### 3.1.2. Angles positifs entre 90° et 180° ou négatifs entre -180° et -270°

Considérons un angle orienté positivement compris entre 90° et 180°. Comme dans le paragraphe précédent, nous nous intéressons à la position du côté et du projeté.

Le projeté orthogonal tombe en dehors du premier côté. Mais ce n'est pas un problème ! Le projeté orthogonal est une notion qui concerne des droites, pas des segments, il suffit de prolonger le côté pour effectuer la projection.

On observe alors les choses suivantes :

— le deuxième côté est *au-dessus* de la droite définie par le premier côté ;
— le projeté d'un point pris sur le deuxième côté se situe à gauche du sommet, sur le coté une fois prolongé.

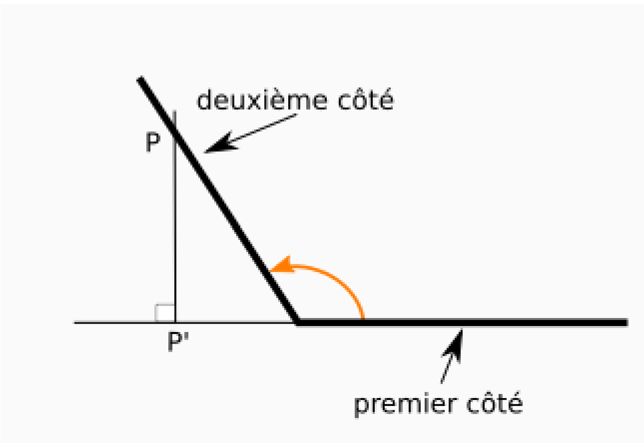



FIGURE 3.2. – Cas d'un angle positif entre 90° et 180° : deuxième côté au dessus du premier et projeté à gauche du sommet.

Il s'agit de la même configuration pour un angle négatif compris entre -180° et -270°.

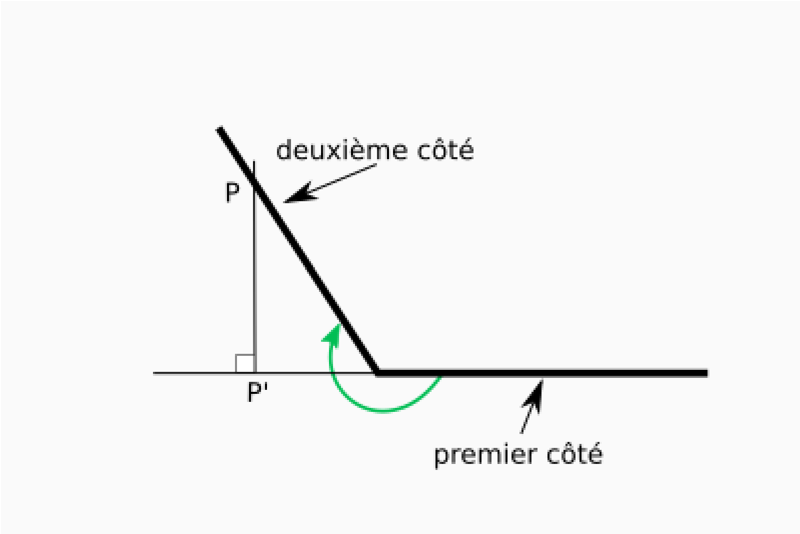



FIGURE 3.3. – Pour un angle négatif entre -180° et -270°, c'est exactement la même situation.

### 3.1.3. Angles positifs entre 180° et 270° ou négatifs entre -90° et -180°

Considérons maintenant un angle dont la mesure est supérieure à 180° mais inférieure à 270°. Le projeté orthogonal est encore une fois en dehors du côté.

On observe les positions relatives suivantes :

— le deuxième côté est *en dessous* de la droite définie par le premier côté ;
— le projeté d'un point pris sur le deuxième côté se situe à gauche du sommet, sur le coté une fois prolongé.

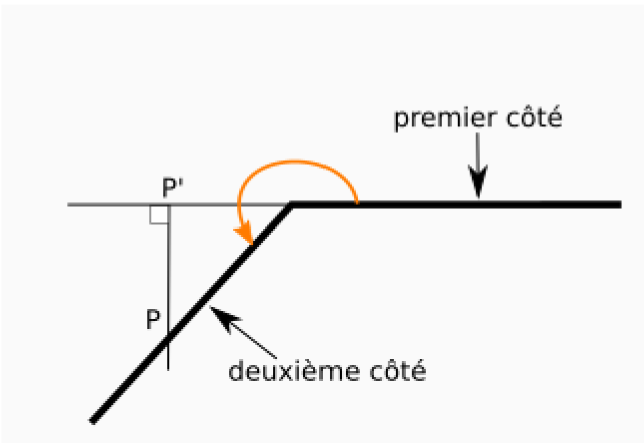



FIGURE 3.4. – Cas d'un angle positif entre 180° et 270° : deuxième côté en dessous et projeté à gauche sur le prolongement du côté.

Il s'agit de la même configuration pour un angle négatif compris entre -90° et -180°. Je vous laisse imaginer la figure.

### 3.1.4. Angles positifs entre 270° et 360° ou négatifs entre 0° et -90°

Maintenant, pour un angle positif entre 270° et 360°, on observe les positions relatives suivantes :

- le deuxième côté est *en dessous* de la droite définie par le premier côté ;
- le projeté d'un point pris sur le deuxième côté se situe à *droite* du sommet, sur le coté une fois prolongé.

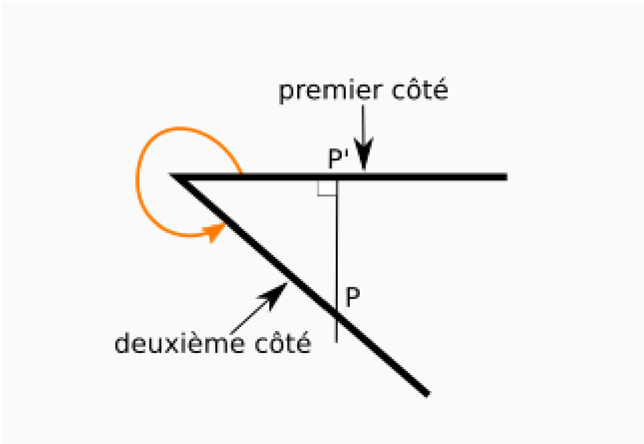



FIGURE 3.5. – Cas d'un angle positif entre 270° et 360° : deuxième côté en dessous et projeté à droite du sommet.

Il s'agit de la même configuration pour un angle négatif comris entre 0° et -90°.

### 3.1.5. Synthèse des configurations

On a finalement quatre configurations selon où se trouve le projeté et le point par rapport au sommet.

1. projeté orthogonal à *droite* du sommet et point P au-dessus du sommet ;
2. projeté orthogonal à *gauche* du sommet et point P au-dessus du sommet ;
3. projeté orthogonal à *gauche* du sommet et point P au-dessous du sommet ;
4. projeté orthogonal à *droite* du sommet et point P au-dessous du sommet ;

Ces configurations correspondent à des quartiers, appelés cadrans, numérotés de 1 à 4 dans le sens positif, comme le montre le schéma ci-dessous :

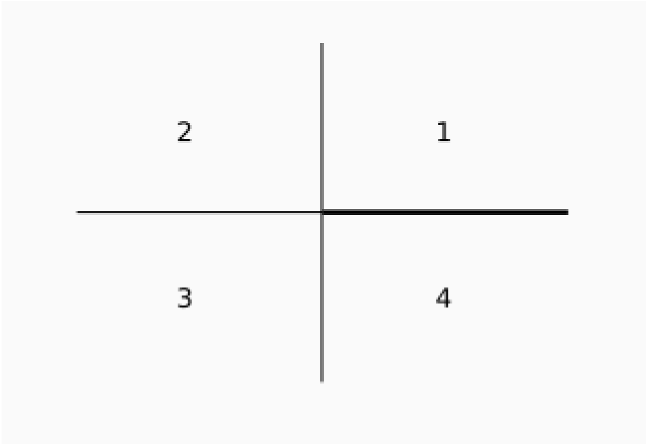



FIGURE 3.6. – Les cadrans sont numérotés de 1 à 4 dans le sens positif. La barre épaisse indique la position du premier côté.

Il est assez facile de déterminer un cadran, tant qu'on se positionne bien par rapport au premier côté de l'angle, c'est-à-dire celui dont la petite flèche définissant l'angle part.

## 3.2. Formules généralisées pour cosinus, sinus et tangente

### 3.2.1. Motivations

On souhaite pouvoir distinguer les différentes configurations et donc distinguer des angles qui auraient autrement les mêmes cosinus, sinus et tangente.

La manière de faire ça est d'ajouter un signe aux distances géométriques. Autrement dit, nous utiliserons ce qu'on appelle des distances algébriques.

Pour la distance entre le sommet et le projeté :

— si le projeté est à droite du sommet, la distance algébrique est positive ;
— si le projeté est à gauche du sommet, la distance algébrique est négative.

On note cette distance algébrique $\overline{SH}$.

Similairement, pour la distance entre le point et son projeté :

— si le point est au-dessus du côté, la distance algébrique est positive ;
— si le point est en dessous du côté, la distance algébrique est négative.

La distance entre le sommet et le point, c'est-à-dire ce qui correspond à l'hypoténuse, reste une distance normale, toujours positive.

### 3.2.2. Formules généralisées

On peut généraliser les formules en utilisant des distances algébriques au lieu des simples longueurs comme dans la partie précédente.

$$\cos = \frac{\overline{SH}}{\overline{SP}}$$

$$\sin = \frac{\overline{HP}}{\overline{SP}} = \frac{\overline{HP}}{\overline{SP_2}}$$

$$\tan = \frac{\overline{H_1P_1}}{\overline{SH_1}} = \frac{\overline{H_2P_2}}{\overline{SH_2}}$$

L'ordre des lettres a une importance !
On peut retenir relativement facilement :
- si la distance met en jeu le sommet, alors il est en premier ;
- sinon, s'il s'agit d'un point et de son projeté, alors le projeté est en premier.

Regarder les orientations des distances algébriques est un peu laborieux, même si cela fonctionne parfaitement à tous les coups et permet de ne retenir qu'une seule formule. Une manière un peu plus imagée de retenir les signes est de regarder la configuration dans laquelle on se trouve :

- pour le cosinus,
  - les angles du 1$^{er}$ et 4$^{e}$ cadran auront un cosinus positif ;
  - les angles du 2$^{e}$ et 3$^{e}$ cadran auront un cosinus négatif ;
- pour le sinus,
  - les angles du 1$^{er}$ et 2$^{e}$ cadran auront un sinus positif ;
  - les angles du 3$^{e}$ et 4$^{e}$ cadran auront un sinus négatif ;
- pour la tangente,
  - les angles du 1$^{er}$ et 3$^{e}$ cadran auront une tangente positive ;
  - les angles du 2$^{e}$ et 4$^{e}$ cadran auront une tangente négative ;

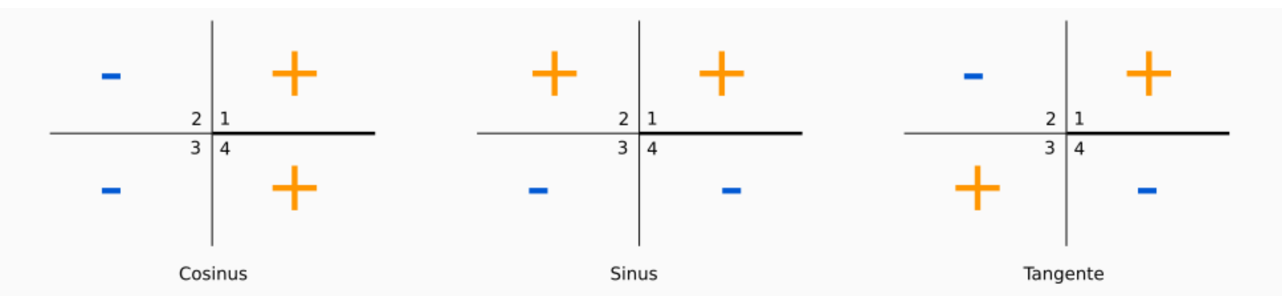



FIGURE 3.7. – Synthèse des signes des cosinus, sinus et tangente en fonction du cadran.

Tout ça est un peu compliqué, le cercle trigonométrique que nous aidera à bien retenir tout ça.

## 3.3. Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est un moyen mnémotechnique qui aide à retenir ou retrouver les signes, de nombreuses valeurs remarquables et les formules de transformation pour tous les angles. Il permet de faire tout ce que le triangle rectangle trigonométrique offre, et plus encore.

### 3.3.1. Construction du cercle trigonométrique

On se place dans un repère d'origine $S$, et on y trace un cercle de rayon $r$. La droite $(T)$ est tangente au cercle.

Le point H est le projeté du point $P$. Ainsi, l'abscisse de $P$ correspond à $r \cdot \cos(\theta)$. L'ordonnée du point $P$ vaut $r \cdot \sin(\theta)$.

Quand on prolonge le rayon $[SP]$, on atteint un point $P_T$ sur la droite *tangente*. L'ordonnée du point $P_T$ est $r \cdot \tan(\theta)$. C'est de là que vient d'ailleurs le nom de tangente.

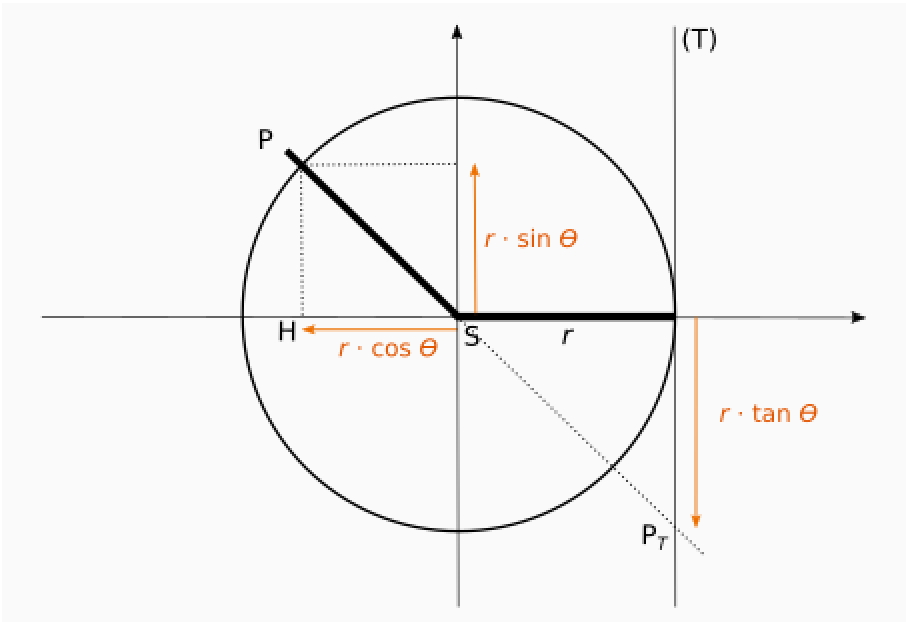



FIGURE 3.8. – Le cercle trigonométrique.

### 3.3.2. Attribuer les bons signes selon l'angle

Dans la figure précédente, il est facile de retrouver les signes dans le repère : il suffit de regarder le signe de l'abscisse et l'ordonnée pour retrouver celui du sinus et du cosinus. De même pour la tangente, le signe sera négatif en dessous de l'axe des abscisses et positif au dessus.

## 3.4. Valeurs remarquables et transformations

### 3.4.1. Valeurs remarquables

Le tableau suivant donne quelques valeurs remarquables qu'il est utile de retenir.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\sin x$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\tan x$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |

Vous constaterez qu'il n'y a que quelques angles aigus positifs, car il est possible de trouver les autres valeurs grâce aux formules de transformation !

Si vous souhaitez démontrer ces valeurs, il est possible de le faire avec des outils de géométrie plus simples, tels que le théorème de Pythagore, notamment.

### 3.4.2. Transformations

#### 3.4.2.1. Angles opposés

Il est possible d'obtenir les valeurs des cosinus, sinus et tangentes d'angles négatifs à partir de l'angle positif de même valeur.

$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

Il est assez facile de se convaincre de leur justesse avec le cercle trigonométrique en observant attentivement.

#### 3.4.2.2. Rotations et symétries

D'abord, commençons par les formules en

$$.Celacorrespondfaireunerotationde180°($$

$\pi rad).Vouspouvezvisualisercesrsultatsdanslecercletrigonomtrique$

$$\cos() = -\cos(x)$$
$$\sin() = -\sin(x)$$
$$\tan() = \tan(x)$$

Ensuite, voilà quelques formules en $\pi - x$. Cela correspond à prendre le symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans le cercle trigonométrique.

$$\cos() = -\cos(x)$$
$$\sin() = \sin(x)$$
$$\tan() = -\tan(x)$$

Maintenant, les formules en $\frac{\pi}{2} + x$. Cela correspond à une rotation d'un quart de tour.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Toutes se démontrent relativement facilement, notamment avec l'aide du cercle trigonométrique ! Il existe encore d'autres formules, mais celles-ci sont les plus utiles.