HOLOSMOS
VAYEL

Introduction aux suites et séries

12 août 2019

Table des matières

?

Si je vous donne la suite de nombre 1, 2, 4, 8, 16, 32, est-ce que vous pouvez trouver le prochain nombre de la suite ?

Ce genre de problèmes est courant dans les tests de QI : certaines épreuves donnent une suite de nombres qu'il faut compléter. Généralement, la méthode pour passer d'un terme au suivant est relativement simple dans les tests de QI ou dans les épreuves de mathématiques ludiques. Mais il ne faudrait pas croire que l'étude de telles suites de nombres est sans importance : leur étude par les mathématiciens a donné de fort belles choses, que ce cours vous propose de découvrir.

!

Pré-requis : N'importe qui peut suivre ce cours, tant qu'il a une maitrise minimale des concepts fondamentaux des mathématiques, qui correspond au niveau du collège en France. Quelques remarques ou définitions utiliseront le concept de fonction, mais sans que cela pose vraiment problème pour une lecture superficielle. Au pire, il existe un cours du célèbre Micmaths sur le sujet sur ce site, disponible via ce lien : Introduction aux fonctions .
Objectifs et approche : Le but du cours est de vous donner les connaissances de base sur les suites et série. Ce cours se centre sur les concepts-clés et tente de rester simple, avec une utilisation très légère et dosée du formalisme : les démonstrations utilisées sont simples et parfois peu formelles, de même que les définitions. Il n'est pas porté sur la pratique et l'entrainement nécessaire à la manipulation des suites et séries : il ne contient pas d'exercices et s'il donne des méthodes de calculs, il ne fournit par le matériel nécessaire pour développer les capacités calculatoires associées.

1. Suites numériques

Pour un mathématicien, une **suite** est un objet mathématique bien plus général que ce qu'on pourrait penser au premier abord. Pour en construire une, il suffit de prendre un certain nombre d'entités mathématiques et de les mettre dans un certain ordre : tel objet est le premier, tel autre le second, etc.

1.1. Suites : définition et construction

Pour créer une suite, on prend des objets mathématiques appartenant à un ensemble et on leur attribue à chacun un numéro (un entier naturel) :

— les éléments de la suite sont appelés les **termes** ;
— quand aux numéros, ils sont appelés indices ou **rangs**.

Ces numéros sont consécutifs, ce qui permet de mettre les entités dans l'ordre voulu. Ainsi, le $n^{\text{ème}}$ élément de la suite est le terme **de rang** n : nous le noterons u_n, alors que la suite en elle-même sera notée (u_n).

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1996/

Figure 1.1. – Un exemple de suite

Si la suite ne s'arrête pas, qu'elle a une longueur infinie, l'ensemble des numéros est l'ensemble des entiers positifs. Mais certaines suites ont une longueur finie, ce qui fait que l'ensemble des numéros est un sous-ensemble des entiers positifs. Il est même possible d'inventer des suites dont le premier rang est supérieur à 1 : le premier terme peut parfaitement être de rang 3, 9, 2798362, ... Mais dans ce qui va suivre, nous n'allons pas utiliser ces suites : les suites seront de longueur infinie et le premier terme aura le rang 0 (parfois le rang 1).

1.1.1. Suites paramétrées

Pour construire une suite (u_n), on peut préciser la valeur de chaque terme. Cette méthode utilise une fonction qui donne la valeur d'un terme en fonction de son rang, c'est-à-dire une fonction définie par $u_n = f(n)$, comme $f(n) = 3n^2 - 2n + 4$ ou $f(n) = \frac{1}{n}$.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1996/

FIGURE 1.2. – Expression paramétrée d'une suite

1.1.2. Suites récurrentes

On peut également définir une suite en exprimant chaque terme en fonction des précédents. Dans le cas le plus simple, on n'en considère qu'un seul : pour tout rang n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Mais il est tout à fait possible d'en utiliser plusieurs. Ces suites sont dites **récurrentes**.

Cependant, plusieurs suites peuvent respecter la même relation entre un terme et les précédents. Par exemple, $(2, 6, 18, 54, \ldots)$ et $(1, 3, 9, 27, \ldots)$ vérifient toutes deux $u_{n+1} = 3u_n$. C'est pourquoi il est nécessaire de spécifier les premiers termes. Plus précisémment, si chaque terme de la suite dépend des n termes précédents, il faut préciser les n premiers termes : sans cela, on ne peut pas déterminer le terme de rang $n + 1$, ni les suivants.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1996/

FIGURE 1.3. – Définition par récurrence d'une suite

Toutes les suites ne sont pas récurrentes, mais toutes admettent une expression paramétrée : il suffit pour la fournir, de regarder son premier terme, son second, etc. De plus, certaines suites récurrentes peuvent être « résolues », c'est-à-dire que la fonction correspondante fournit une expression du $n^{\text{ème}}$ terme en fonction de n valable quelque soit le rang.

1.2. Suites numériques les plus courantes

Dans ce qui va suivre, nous parlerons essentiellement des suites de nombres réels, aussi appelées **suites numériques**. Nous allons d'abord passer en revue quelques suites courantes, certaines d'entre elles étant introduites par des exemples de la vie réelle.

1.2.1. Suites arithmétiques

Les **suites arithmétiques** sont des suites où les termes augmentent avec un pas régulier : on compte de 2 en 2, de 3 en 3, de 1.6 en 1.6, de 39 en 39, etc. Par exemple, dans la suite $(3, 7, 11, 15, 19, 23, \ldots)$, chaque terme s'obtient en additionnant quatre au précédent. Ainsi, chaque terme s'obtient en additionnant une constante au terme précédent : $u_{n+1} = u_n + k$. Cette constante k, le pas de la suite, est appelée la **raison** de la suite. Celle-ci peut être aussi bien positive que négative, ce qui permet de construire des suites comme $(8, 5, 2, -1, -4, -7, -10, \ldots)$.

?

Supposons que je connaisse le premier terme et la raison : comment obtenir le terme de rang n ?

Prenons l'exemple de la suite de premier terme 142 et de raison 21, et faisons un tableau de ses premiers termes.

Rang	**Terme de la suite**
0	142
1	142 + 21
2	(142 + 21) + 21
3	(142 + 21 + 21 + 21) + 21
4	(142 + 21 + 21 + 21 + 21) + 21
5	(142 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21) + 21
...	...

Remplaçons les additions répétées par des multiplications.

Rang	**Terme de la suite**
0	142
1	$142 + 1 \times 21$
2	$142 + 2 \times 21$
3	$142 + 3 \times 21$
4	$142 + 4 \times 21$
5	$142 + 5 \times 21$
...	...

On observe que chaque terme de la suite vaut exactement :

$$u_n = u_0 + nk$$

Supposons que je ne connaisse pas le premier terme, mais que je connaisse le terme de rang n et la raison : comment obtenir le terme de rang m ?

Pour cela, on peut réfléchir assez simplement :

— pour arriver à m, on fera $m - n$ pas ;
— chaque pas (on passe au terme suivant) ajoute la constante k ;
— on en déduit que la différence entre u_n et u_m vaudra donc $k(m - n)$.

$$u_m = u_n + k(m - n).$$

1.2.2. Suites géométriques

Vous possédez tous un compte bancaire sur lequel vous épargnez votre argent (du moins, je vous le souhaite). Comme vous le savez peut-être, les comptes d'épargne sont rémunérés par des intérêts : vous touchez environ 2 à 3 % de la somme présente sur votre compte en intérêts, le pourcentage exact étant nommé le taux d'intérêt. Si vous n'ajoutez ni ne retirez d'argent sur votre compte, la somme totale présente sur votre compte augmente chaque année.

Quelle est la somme que vous aurez sur ce compte dans plusieurs années, connaissant la somme actuelle ?

Formalisons la situation : soit u_n la somme d'argent présente sur votre compte n années après le dépôt de l'argent. On pourrait croire que la suite est une suite arithmétique, mais les intérêts ne sont pas une somme fixe : pour un taux d'intérêt i, la somme sur votre compte est multipliée par $(1 + i)$ chaque année. La suite obtenue est une **suite géométrique**, où chaque terme s'obtient en multipliant le terme précédent par une constante.

$$u_{n+1} = u_n \times k$$

La constante k est appelée la **raison** de la suite. Cette raison peut être positive, négative, fractionnaire, réelle, etc. Si la raison est négative, la suite est composée d'une succession de termes positifs et négatifs : un terme positif est intercalé entre deux négatifs, et réciproquement. Par exemple, on peut citer la suite $(4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, \ldots)$.

Supposons que je connaisse le premier terme et la raison : comment obtenir le terme de rang m ?

Il suffit d'utiliser un raisonnement similaire à celui montré plus haut avec les suites arithmétiques : remplacez les additions par des multiplications, les séries de multiplications répétées par des puissances, et vous obtiendrez la formule suivante : $u_n = u_0 \times k^n$.

?

Supposons que je connaisse pas le premier terme, mais que je connaisse le terme de position n et la raison : comment obtenir le terme de rang m ?

Vu que $u_n = u_0 \times k^n$, et $u_m = u_0 \times k^m$, on a :

$$\frac{u_m}{u_n} = \frac{u_0 \times k^m}{u_0 \times k^n} = \frac{k^m}{k^n} = k^{m-n}$$

$$u_m = u_n \times k^{m-n}$$

1.2.3. Suites arithmético-géométriques

Les **suites arithmético-géométriques** sont des généralisations des suites géométriques et arithmétiques. Avec ces suites, chaque terme se calcule en multipliant le précédent par une raison, et en ajoutant une constante additive :

$$u_{n+1} = u_n \times r + k$$

i

Une suite arithmétique est un cas particulier de suite arithmético-géométrique, où $r = 1$. Et une suite géométrique est un cas particulier de suite arithmético-géométrique, où $k = 0$.

?

Puis-je obtenir une expression en fonction de n d'une telle suite ?

Pour obtenir cette expression, nous allons déterminer la différence entre la suite arithmético-géométrique voulue et une suite géométrique de même raison et de premier terme identique. Ainsi, nous allons comparer :

- une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = u_n \times r + k$;
- et la suite géométrique définie par $v_{n+1} = v_n \times r$, avec $u_0 = v_0$.

Rang	**Suite géométrique**	**Suite arithmético-géométrique**	**Différence entre les deux suites**
0	v_0	u_0	0
1	$v_0 r$	$u_0 r + k$	k
2	$v_0 r^2$	$u_0 r^2 + kr + k$	$kr + k$
3	$v_0 r^3$	$u_0 r^3 + k^2 r + kr + k$	$k^2 r + kr + k$
...	...	...	...
n	$v_0 r^n$	$u_0 r^5 + k^n r + k^{n-1} r + ... + k^2 r + kr + k$	$k^n r + k^{n-1} r + ... + k^2 r + kr + k$

On en déduit que le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite arithmético-géométrique est simplement égal au terme de même rang de la suite géométrique $u_0 r^n$, auquel on ajoute $k^n r + k^{n-1} r + ... + k^2 r + kr + k$. On verra plus tard dans ce cours comment faire ce calcul. Tout ce qu'on peut dire, c'est que la formule vue plus haut se simplifie en :

$$(u_0 + \frac{r}{1-k})r^n + \frac{1}{1-k}$$

Mais ces observations et déductions à partir d'un exemple ne valent pas une démonstration. Pour en faire une, nous allons distinguer deux cas.

— $r = 1$

On a alors une bête suite arithmétique, et $u_n = u_0 + kn$.

— $r \neq 1$

Cherchons un réel x tel que :

$$x = xr + k.$$

Comme $r \neq 1$, on peut diviser par $1 - r$ et :

$$x = \frac{k}{1-r}.$$

Une fois un tel réel obtenu, nous soustrayons l'équation précédente à la définition de la suite :

$$u_{n+1} - x = (u_n r + k) - (xr + k) = (u_n - x)r$$

Que reconnaissez-vous ? Une suite géométrique, pardi ! On a donc :

$$u_n - x = (u_0 - x)r^n.$$

Pour finir, on en déduit notre expression de u_n :

$$u_n = (u_0 - \frac{k}{1-r})r^n + \frac{k}{1-r}.$$

Ce qui est exactement l'équation que nous avions obtenue par observation.

1.2.4. Suites récurrentes linéaires

On peut généraliser encore les suites arithmético-géométriques, en prenant en compte plusieurs termes précédents : ce qui est fait avec le terme précédent peut aussi l'être avec les n termes précédents, voire la totalité de ceux-ci.

1.2.4.1. Suite de Fibonnaci

La suite de ce genre la plus simple est la **suite de Fibonnaci**. Celle-ci est apparue pour la première fois dans un problème de mathématiques récréatives crée par Leonardo Fibonacci, qui donna son nom à cette suite. Le problème posait le contexte suivant :

— le premier mois, nous plaçons un couple de deux lapins dans un enclos ;
— un couple de lapin donne naissance à un petit après deux mois passés dans l'enclos ;
— chaque couple capable de procréer donne naissance à un nouveau couple ;
— enfin, comme les diamants, les lapins ne meurent jamais.

?

Combien il y a-t-il de couples de lapins dans l'enclos au n-ième mois ?

Pour le déterminer, on peut fabriquer une suite dont le n-ième terme donne le nombre de couples de lapins au n-ième mois : c'est la suite de Fibonnaci. On peut remarquer que le nombre de couples de lapins est égal au nombre de lapins qu'il y avait dans l'enclos l'année précédente, auquel il faut ajouter le nombre de couples formés par reproduction. Ce nombre de couples formés par reproduction est égal au nombre de couples qu'il y avait deux mois auparavant dans l'enclos. Ainsi, chaque terme est la somme des deux précédents.

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Ensuite, il faut remarquer une chose : au premier et second mois, on n'a qu'un seul couple de lapin, celui-ci mettant deux mois à se reproduire. Cette suite commence donc avec les entiers 0 et 1. La suite obtenue donne ceci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, etc.

1.2.4.2. Allons plus loin

Là où on se contente d'additionner les deux termes précédents dans la suite de Fibonnaci, certaines suites additionnent un nombre de termes précédents plus important. Ainsi, rien ne nous empêche d'avoir une suite avec la relation de récurrence suivante : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3}$. Une telle suite est appelée la **suite de tribonacci**. Et ce qui peut être fait avec les deux ou trois termes précédents peut l'être avec beaucoup plus de termes. On trouve ainsi des suites de pentabonacci, hexabonacci, octobonnaci, où chaque terme est la somme des 5, 6, 8 précédents.

On peut généraliser les suites précédentes, en ajoutant une possibilité : chaque terme précédent peut être multiplié par une constante bien précise dans le calcul du terme u_{n+1}. En faisant cela, on obtient des **suites récurrentes linéaires**, ces suites où chaque terme est égal à la somme des termes précédents, chaque terme étant auparavant multiplié par un coefficient qui lui est propre :

$$u_n = (a_{n-1} \times u_{n-1}) + (a_{n-2} \times u_{n-2}) + \ldots + (a_1 \times u_1) + (a_0 \times u_0)$$

1.3. Sens de variation et bornes d'une suite numérique

Les suites numériques ont souvent des propriétés que d'autres suites n'ont pas forcément, aussi nous allons voir ces propriétés.

1.3.1. Croissance, décroissance et monotonie

Prenons la suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 20. Regardons comment évoluent les termes de la suite en fonction du rang.

Rang	**Termes de la suite**
0	20
1	25
2	30
3	35
4	40
5	45
6	50
7	55
…	…

On remarque très rapidement que chaque terme de la suite est plus grand que le précédent. Dit autrement, pour tout rang n, $u_{n+1} > u_n$. Dans ces conditions, la suite est dite **strictement croissante**.

Maintenant, prenons une autre suite, qui attribue à chaque rang la puissance de deux qui lui est immédiatement inférieure ou égale.

Rang	**Termes de la suite**
0	0
1	1
2	2
3	2
4	4
5	4
6	4
7	4

8	8
9	8
10	8
...	...

Cette suite n'est pas strictement croissante, vu que certains termes consécutifs sont égaux. Mais ses termes augmentent sans cesse quand le rang augmente. Dans ces conditions, la suite est dite croissante (mais elle n'est pas strictement croissante). Plus précisément, une suite est dite **croissante** si tout terme est supérieur ou égal au précédent : pour tout n, $u_{n+1} u_n$.

D'autres suites ne sont pas croissantes, ni strictement croissante, mais décroissantes ou strictement décroissantes. Une suite est dite **décroissante** si tout terme est inférieur ou égal au précédent : pour tout n, $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1}$ u_{n}. Si jamais tout terme est strictement inférieur au précédent, la suite est dite **strictement décroissante** : pour tout n, $\mathrm{u}_{\mathrm{n}+1} < \mathrm{u}_{\mathrm{n}}$.

Maintenant, prenez n'importe quelle suite arithmétique : vous verrez qu'elles sont soit croissantes, soit décroissantes. Dit autrement, vous ne trouverez pas de suite arithmétique qui ne soit ni croissante, ni décroissante. Pour éviter de dire qu'une catégorie de suite est soit croissante, soit décroissante, on préfère dire qu'elle est **monotone**.

?

Mais est-ce que toutes les suites sont monotones ?

Prenez une suite géométrique dont la raison est négative et le premier terme non-nul, et regardez ce qui se passe. Par exemple, prenons la suite géométrique de raison -5 et de premier terme -2.

Rang	**Termes de la suite**
0	-2
1	10
2	-50
3	250
4	-6250
5	31250
...	...

Cette suite n'est clairement pas monotone, et ce ne sont pas les seules.

?

Comment savoir si une suite est monotone ?

Il n'y a pas vraiment de méthode générale, mais quelques méthodes qui peuvent marcher dans certaines situations.

Une de ces méthode est simplement de calculer de manière générale $u_{n+1} - u_n$, et de regarder si le résultat est toujours positif ou toujours négatif :

— si cette différence est toujours positive, la suite est croissante ;
— si la différence est toujours négative, la suite est décroissante ;
— si elle peut être autant positive que négative, on ne peut rien dire.

1.3.2. Bornes d'une suite

Maintenant, il est intéressant de regarder quelles sont les bornes d'une suite. Si vous regardez bien, les valeurs des termes d'une suite peuvent parfois être encadrés dans un intervalle bien précis : la suite ne contient aucun terme en dehors de cet intervalle. Mais pour d'autres, ce n'est pas du tout le cas. Dans ce qui va suivre, nous allons étudier un petit peu quelles sont les bornes d'une suite.

Une suite peut être :

— minorée ;
— majorée ;
— ou bornée.

Une **suite majorée** est une suite dont tous les termes sont inférieurs ou égaux à un majorant : pour tout u_n de la suite, on a $u_n \leq k$ avec k un majorant. On peut noter que si une suite admet un majorant, elle en admet une infinité : une suite majorée par 5 l'est aussi par 6, 7, 8, 25, 1567496, etc. Parmi tous ces majorants, il en existe un plus petit majorant, dont la valeur est inférieure à celle de tous les autres. On appelle ce majorant : la borne supérieure.

Une **suite minorée** est une suite où tous les termes sont supérieurs ou égaux à un minorant : pour tout u_n dans la suite, on a $u_n \geq k$ avec k le minorant choisi. On peut noter que si une suite admet un minorant, elle en admet une infinité : une suite minorée par 5 l'est aussi par 4, 3, 2, etc. Là encore, il existe un plus grand minorant : c'est la borne inférieure.

Une **suite bornée** est une suite qui est à la fois minorée et majorée. En clair, tous les termes de la suite sont pris dans un intervalle, et plus précisément un intervalle dont les deux bornes sont des nombres réels.

1.4. Limites de suites

Les suites sont souvent étudiées pour savoir comment celles-ci se comportent quand le rang augmente et devient très très grand. Et autant prévenir : certaines suites peuvent donner du fil à retordre aux mathématiciens. Un bon exemple est celui de la **suite de Syracuse**, définie par la relation de récurrence suivante :

— si u_n est pair, on obtient u_{n+1} en divisant u_n par deux ;
— sinon, on multiplie u_n par 3 et on ajoute 1.

Si vous essayez avec le premier terme de votre choix, vous aurez de très fortes chances que cette suite se stabilise au bout d'un certain temps : la fin de la suite sera une succession de 1,4,2,1,4,2… Mais aucun mathématicien n'a réussi à le démontrer à l'heure où j'écris ces lignes (fin 2015).

1.4.1. Limite d'une suite

Mais toutes les suites ne finissent pas par une répétition périodique d'un même motif, comme la suite de Syracuse. Par exemple, la suite des nombres entiers définie par $u_n = n$ voit son terme général grandir de plus en plus avec le rang n. Prenons comme autre exemple la suite définie par $u_n = 1/(n+1)$ et regardons ses premières valeurs. On remarque que les termes de la suite semblent se rapprocher d'autant plus de 0 que n est grand.

Rang	**Terme de la suite**
0	1
1	0,5
2	0,33333
3	0,25
4	0,2
5	0,16666666
6	0,1428
7	0,125
…	…

Les deux suites présentées ont donc des comportements très différents quand on augmente le rang : l'une semble se rapprocher de plus en plus d'une valeur finie, tandis que l'autre semble se rapprocher de l'infini.

Pour étudier le comportement d'une suite quand le rang n « tend » de l'infini (le comportement *asymptotique*), on doit utiliser ce qu'on appelle la **limite de la suite**, qui correspond plus ou moins à la valeur vers laquelle un terme de la suite tend quand on augmente le rang. Pour introduire cet outil, on va distinguer trois cas de figures :

- la suite « tend » vers une valeur finie : une suite constante, par exemple ;
- la suite « tend » vers une valeur infinie : par exemple avec le cas $u_n = n$ ou $u_n = -n$) ;
- la suite ne « tend » pas vers une valeur précise : un exemple serait la suite définie par $u_n = (-1)^n$.

1.4.1.1. Convergence

Supposons que la suite de terme général u_n « tende » vers un réel fini, que nous noterons l. Intuitivement, plus n grandit, plus la différence $u_n - l$ est petite. En termes plus précis, cela signifie que pour tout $e > 0$ (que l'on souhaite prendre très petit), il existe une certaine valeur k telle que pour tout $n > k$ on ait $u_n \in]l - e, l + e[$.. Lorsqu'un tel l existe, on dit que u_n *converge* vers l.

1.4.1.2. Divergence

Supposons maintenant que u_n « tende » vers $+\infty$. Concrètement, il est impossible « d'enfermer » les termes u_n dans un intervalle : il existera toujours des termes qui seront plus grand qu'une valeur constante fixée **et** ils le seront tous à partir d'un certain rang. Formellement, pour tout nombre M tel que $M > 0$, il existe un rang k tel que pour tout $n > k$ on ait $u_n > M$. Dans un tel cas de figure, on dit que la suite *diverge* vers $+\infty$.

Le cas où u_n « tend » vers $-\infty$ est très analogue ! Au lieu de demander $u_n > M$ on va demander $u_n < -M$ ce qui revient à dire que pour toute constante choisie, il existe des termes qui seront plus petits que cette constante **et** qui le seront tous à partir d'un certain rang.

Il existe cependant des situations où la suite ne « tend » pas vers une valeur précise. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ en est un bon exemple : ses termes oscillent entre les deux valeurs -1 et 1. Il existe d'autres suites du même genre qui n'ont tout simplement pas de limite.

1.4.2. Déterminer la convergence d'une suite

?

Comment démontrer la convergence d'une suite ?

Il y a bien un critère relativement général qui permet de savoir si une suite numérique convergence : il s'agit du critère de Cauchy. Mais attention, ce critère ne vaut que pour les suites numériques dont tous les termes sont réels.

1.4.2.1. Critère de Cauchy

Augustin Louis Cauchy était un mathématicien qui a beaucoup travaillé sur les suites. Nous rencontrerons beaucoup de résultats qui portent son nom. Pour le moment, nous allons voir un résultat que Cauchy a obtenu en étudiant des suites basées sur des fonctions trigonométriques, mais qui se généralise à toute suite réelle.

Cauchy étudia des suites qui portent aujourd'hui son nom : les **suites de Cauchy**. Ces suites ont des termes qui deviennent de plus en plus proches au fur et à mesure que le rang augmente : leur différence tend vers zéro. Dit autrement, si on pose un nombre réel ϵ aussi petit qu'on veut, il existe toujours un rang où la différence entre deux termes de rang supérieur est inférieure à cet ϵ. Notons que les deux termes de rang supérieur ne sont pas forcément consécutifs. Cauchy a réussit à démontrer que toute suite réelle convergente est une suite de Cauchy. Et la réciproque est vraie, pour les suites réelles : si une suite réelle est une suite de Cauchy, alors elle converge.

1.4.2.2. Suites monotones

La convergence d'une suite monotone dépend de :

— si la suite est croissante ou décroissante ;
— si la suite admet un majorant ou un minorant.

Suite	Croissante	Décroissante
Admet un minorant mais pas de majorant	$+\infty$	Limite égale à la borne inférieure
Admet un majorant mais pas de minorant	Limite égale à la borne supérieure	$-\infty$

1.4.2.3. Théorème des gendarmes

Enfin, nous allons vous présenter une dernière méthode, basée sur le **théorème des gendarmes**. Celui-ci faut intervenir trois suites : deux suites (u_n) et (v_n) qui ont la même limite l, et une troisième suite (w_n) dont la limite est inconnue. Maintenant, imaginons que la troisième suite est encadrée entre les deux autres : au-delà d'un certain rang, $u_n \leq w_n \leq v_n$. Dans ce cas, on peut affirmer que les trois suites ont la même limite l.

2. Sommes partielles

A partir d'une suite, les mathématiciens définissent sa **somme partielle**, l'addition des k premiers termes de la suite : pour la suite (u_n), la somme partielle vaut $\sum_{n=0}^{k} u_n$. Dans ce qui va suivre, nous allons voir dans le détail quelques sommes partielles relativement classiques. Nous étudierons leur convergence et leur divergence et donnerons quelques formules utiles.

2.1. Suite des sommes partielles

Avant de nous enfoncer dans une petite jungle de suites et de sommes partielles, faisons le point sur ce que signifie l'expression « somme partielle ». Après tout, pourquoi une somme serait-elle « partielle » ?

2.1.1. La motivation de cette notion

La principale raison pour lesquelles on étudie les sommes *partielles* c'est parce qu'elle permettent d'étudier des *séries*. Ces objets qui seront abordés dans la partie suivante servent à faire la *somme* de tous les termes d'une suite. La suite des sommes partielles fait ce lien entre une somme *finie* de termes et la somme *infinie* des termes d'une suite. La dénomination « partielle » a donc cette signification : on ne somme qu'un nombre fini de termes d'une suite.

2.1.2. C'est une suite

Si je vous donne une suite et que je vous demande de calculer la somme des n premiers termes, où je laisse libre le choix de n alors vous obtiendrez une suite fonction de n. C'est la **suite des sommes partielles**. Par exemple, avec la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je peux construire sa suite des sommes partielles, $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Dans ce qui suit, nous étudierons exclusivement ces suites de sommes partielles.

2.2. Suites de nombres polygonaux

Nous allons commencer par étudier ce qu'on appelle des suites relativement simples, qui s'obtiennent en fabriquant des figures géométriques en juxtaposant des boules les unes à coté des autres. Ces nombres sont appelés des **nombres figurés**.

2.2.1. Suite des nombres triangulaires

Commençons par un cas simple : prenez des boules (ou des billes), et tentez de former un triangle équilatéral avec. Vous allez remarquer que vous ne pouvez pas créer un triangle avec un nombre arbitraire de boules : vous ne pourrez le fait que pour certains nombres de boules.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1996/

Figure 2.1. – Image de Melchoir, disponible sur wikicommons sous licence CC BY-SA 3.0

Il est facile de créer une suite avec ces nombres. La suite en question est appelée la suite des **nombres triangulaires** : le énième terme de la suite des nombres triangulaire donne le nombre de boules pour un triangle de n boules de côté. On obtient alors : 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, etc.

2.2.1.1. Relation de récurrence

A ce stade, on peut tenter de trouver la relation qui relie les termes u_n et u_{n+1} de cette suite. Pour cela, le mieux est de faire quelques observations. Il suffit de lister des différences entre ces deux termes suivant le rang, et de regarder si on peut obtenir quelque chose d'intéressant. Voici ce que donne cette liste.

Rang	u_n	$u_n - u_{n-1}$
0	0	-
1	1	1
2	3	2
3	6	3
4	10	4
5	15	5
6	21	6
7	28	7
8	36	8
9	45	9
10	55	10
…		

Je crois qu'on ne peut pas faire plus clair. On voit bien que chaque terme est égal à la somme du précédent et du rang. La suite des nombres triangulaires est donc définie par :

— $u_0 = 0$;
— $u_{n+1} = u_n + n$.

2.2.1.2. Calcul du terme général

Maintenant, on peut déterminer s'il existe un moyen pour déterminer la valeur du terme général u_n sans devoir calculer u_{n-1}. Et pour cela, il suffit juste de remarquer une chose : le énième terme de la suite des nombres triangulaire est égal à la somme de tous les entiers compris entre 0 et n. Il ne nous reste plus qu'à trouver une méthode pour faire ce calcul.

La légende veut que Gauss a été le premier à découvrir quelle était la formule du calcul de la somme des n premiers entiers, alors qu'il était au primaire. Son professeur avait donné, en guise d'exercice (une sorte de punition collective, en fait), le calcul des 100 premiers entiers à ses élèves. Là où les autres élèves faisaient le calcul à la main, en additionnant les 100 premiers entiers manuellement, Gauss remarqua quelque chose d'étrange dans la suite de calculs suivants :

— 1 + 100 = 101 ;
— 2 + 99 = 101 ;
— 3 + 98 = 101 ;
— ... ;
— 49 + 52 = 101 ;
— 50 + 51 = 101 ;
— ... ;
— 98 + 3 = 101 ;
— 99 + 2 = 101 ;
— 100 + 1 = 101.

Ainsi, en additionnant la suite S avec elle-même, il se retrouvait avec 100 fois 101 : $2S = 100 \times 101$. Le calcul de la somme partielle est alors aisé. C'est une propriété qui se généralise à la somme des n premiers entiers : $u_0 + u_n = u_1 + u_{n-1} = u_2 + u_{n-2} = ...$. Ainsi, si l'additionne la suite S avec elle-même, on obtiendra :

$$2S = n(u_0 + u_n)$$

$$S = \frac{n(u_0 + u_n)}{2}$$

Vu que pour la suite des entiers naturels, $u_n = n + 1$ et $u_0 = 1$, on a alors :

$$2S = n(1 + n)$$

$$S = \frac{n(1 + n)}{2}$$

2.2.2. Suite des entiers impairs

Maintenant, nous allons légèrement changer le problème : au lieu de vouloir créer un triangle avec des boules, nous allons tenter de créer des carrés. Dans cette situation, le coté des carrés en question sera un nombre entier, et le nombre de boules dans ce carré sera égal au carré du côté. La suite des nombres carrés est simplement égale à la suite des carrés des nombres entiers : $u_n = n^2$.

2.2.2.1. Relation de récurrence

Comme pour les nombres triangulaires, nous allons tenter de déterminer une relation de récurrence pour cette suite. Nous allons utiliser la même méthode, à savoir faire la différence entre chaque terme et le précédent, et tenter de voir si on observe quelque chose d'intéressant.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1996/

Figure 2.2. – Dans ce schéma, chaque carré englobe l'ancien : les nouvelles boules ajoutées au carré précédent sont marquées en rouge - Image de Aldoaldoz, wikicommons, licence GFDL 1,2 et CC-BY-SA 3.0

Rang	u_n	$u_n - u_{n-1}$
0	0	-
1	1	1
2	4	3
3	9	5
4	16	7
5	25	9
6	36	11
7	49	13
8	64	15
9	81	17
10	100	19
...		

On remarque facilement qu'il faut ajouter un nombre impair pour passer au terme suivant. Plus précisément, il faut ajouter le énième nombre impair pour passer de u_n à u_{n+1}. Dit autrement, la suite des carrés est la suite :

- de premier terme nul ($0^2 = 0$) ;
- définie par $u_{n+1} = u_n + (2n + 1)$: chaque terme s'obtient en additionnant le énième nombre impair au terme précédent.

2.2.2.2. Terme général

De ce qu'on vient de dire plus haut, on peut faire une déduction sur le terme général. On sait que celui-ci est égal au carré du rang : $u_n = n^2$. Mais on sait maintenant quel est le lien entre ce terme et les entiers impairs : n^2 est égal à la somme des n premiers nombres impairs.

$$1 + 3 + \ldots\ldots + (2n{-}1) = n^2$$

2.2.3. Nombres pentagonaux

Ce qui peut être fait avec des triangles et des carrés peut aussi être fait avec des hexagones (6 côtés), des pentagones (5 côtés), des dodécagone (12 côtés), ou toute autre polygone régulier. Dans ce qui va suivre, nous allons voir ce que cela donne avec les nombres pentagonaux.

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1996/

Figure 2.3. – Dans ce schéma, chaque pentagone englobe l'ancien : les nouvelles boules ajoutées au pentagone précédent sont marquées en rouge - Image de Aldoaldoz, wikicommons, licence GFDL 1.2 et CC-BY-SA 3.0

2.2.3.1. Relation de récurrence

La relation de récurrence des nombres pentagonaux est relativement simple à trouver pour qui sait comment s'y prendre. Pour commencer, regardons combien il faut ajouter au terme de rang n pour passer au suivant, et notons les résultats dans un tableau.

Terme de rang n	$u_{n+1} - u_n$
0	1
1	4
2	7
3	10
4	13

5	16
6	19
...	...

On remarque rapidement que $u_{n+1} - u_n$ est un nombre de la forme $3n + 1$. En clair : $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$

2.2.3.2. Terme général

Maintenant, on veut savoir comment calculer le énième nombre pentagonal. Pour découvrir quelle est la formule, nous allons vous faire remarquer que le énième nombre pentagonal est égal à la somme des nombres de la forme $3n + 1$. Cette somme est simplement égale à :

$$(3 \times 0 + 1) + (3 \times 1 + 1)(3 \times 2 + 1)(3 \times 3 + 1)(3 \times 4 + 1) + ... + (3 \times n + 1)$$

On peut alors regrouper les $+1$: vu qu'il y en a exactement n, on en déduit que la formule se simplifie en :

$$n + (3 \times 0) + (3 \times 1)(3 \times 2)(3 \times 3)(3 \times 4) + ... + (3 \times n)$$

De là, on peut factoriser le 3 :

$$n + 3 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4... + n)$$

Or, on sait calculer $(0 + 1 + 2 + 3 + 4... + n)$: c'est le énième nombre triangulaire ! La formule se simplifie donc en :

$$u_{n+1} = n + 3 \times \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

Ce calcul donne u_{n+1}, mais on peut rapidement en déduire u_n.

$$u_n = \frac{n(3n - 1)}{2}$$

2.2.4. Autres nombres polygonaux

On pourrait poursuivre plus loin et parler des nombres hexagonaux et autres. Mais nous n'allons pas faire ces développements longs et compliqués, et passer directement au cas général : celui des **nombres polygonaux**. Les nombres polygonaux se représentent avec des polygones réguliers, des figures géométriques dont les côtés ont tous la même longueur et dont tous les angles sont identiques. Les nombres triangulaires, carrés et pentagonaux sont des cas particuliers de nombres polygonaux.

Voici les formules qui donnent u_n en fonction du nombre de cotés de polygone :

— hexagonal : ½n(4n - 2) ;
— heptagonal : ½n(5n - 3) ;
— octogonal : ½n(6n - 4) ;
— ennéagonal : ½n(7n - 5) ;
— décagonal : ½n(8n - 6) ;
— undécagonal : ½n(9n - 7) ;
— dodécagonal : ½n(10n - 8) ;
— triskaidécagonal : ½n(11n - 9) ;
— etc.

On voit se dégager une sorte de motif général, qui nous donne la formule suivante. Pour un nombre k de côtes, le énième nombre polygonal est égal à :

$$\frac{n}{2}((k-2)n-(k-4))$$

2.3. Suites arithmétiques

Calculer la somme partielle d'une suite arithmétique consiste à additionner tous les termes dont le rang est compris entre 0 et m. On a alors :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_m$$

Remplaçons maintenant chaque terme par son expression calculée par $u_n = u_0 + nk$.

$$S = u_0 + (u_0 + k) + (u_0 + 2k) + (u_0 + 3k) + \ldots + (u_0 + mk)$$

Dans cette expression, on peut regrouper les termes u_0 ensemble : il y en a m en tout :

$$S = (u_0 \times m) + (k + 2k + 3k + \ldots + mk)$$

Maintenant, factorisons le terme k :

$$S = (u_0 \times m) + k(1 + 2 + 3 + \ldots + m)$$

On sait calculer le facteur $(1 + 2 + 3 + \ldots + m)$: c'est la somme des m premiers entiers.

On obtient alors la formule suivante :

$$S = \frac{k(m+1)m}{2} + m \times u_0$$

On peut factoriser m et mettre l'expression au même dénominateur :

$$S = m\frac{k(m+1) + 2u_0}{2}$$

A ce moment là, il faut se souvenir que $u_{n+1} = u_0 + (n+1)k$, ce qui permet de simplifier l'équation du dessus en :

$$S = n\frac{u_{n+1} + u_0}{2}$$

On peut remarquer que les suites de nombres figurés sont des cas particuliers de suites arithmétiques. En effet, la suite des nombres entiers est une suite de premier terme 0 et de raison 1, alors que la suite des entiers impairs est la suite de premier terme 1 et de raison 2. Si vous utilisez la formule du calcul du énième terme d'une suite arithmétique, vous verrez que vous retomberez sur les formules déterminées pour les nombres triangulaires et carrés.

2.4. Suites géométriques

Maintenant, nous allons voir le cas de la **somme partielle géométrique**, à savoir la somme des n premiers termes d'une suite géométrique. Reprenons la formule d'une série géométrique partielle, où l'on additionne les n premiers termes d'une suite (qui vont de 0 à $n-1$) :

$$S = u_0 + (u_0 \times r^1) + (u_0 \times r^2) + (u_0 \times r^3) + ... + (u_0 \times r^{n-1})$$

Maintenant, multiplions cette formule par la raison de la suite :

$$S \times r = (u_0 \times r^1) + (u_0 \times r^2) + (u_0 \times r^3) + ... + (u_0 \times r^{n-1}) + (u_0 \times r^n)$$

Soustrayons les deux résultats précédents, S et $S \times r$:

$$S - (S \times r) = u_0 - u_0 \times r^n$$

On a alors :

$$S \times (1-r) = u_0 \times (1-r^n)$$

2. Sommes partielles

Il vient alors :

$$S = u_0 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

3. Séries numériques

?

Qu'est-ce qui se passe quand on pousse une somme partielle jusqu'au bout, quand on additionne l'infinité de terme de la suite ?

Cette question posa de nombreux problèmes, le premier d'entre ayant été mentionné par dans un paradoxe émis par le philosophe Zénon, qui prétendait que le mouvement est une impossibilité. Supposons que je cours vers un arbre situé à un kilomètre de ma position. Pour franchir cette distance, je devrais d'abord parcourir la moitié de la distance qui me sépare de cette arbre. Puis, je devrais parcourir la moitié de la distance restante. Une fois cela fait, je devrais encore parcourir la moitié de la distance restante, et ainsi de suite. Zénon prétendait que le nombre d'étapes à parcourir étant infinie, je n'arriverais jamais à parcourir la distance qui me sépare de l'arbre.

Ce paradoxe semble relativement contre-intuitif, mais il peut se résoudre facilement d'un point de vue mathématique. La suite des distances à parcourir n'est autre que la suite des puissances de deux : je dois parcourir la moitié de la distance, puis le quart, puis le huitième, et ainsi de suite : on a bien la suite définie par $u_n = \frac{1}{2^n}$. Zénon pense que le nombre de termes de cette suite étant infinie, la somme de la totalité des termes l'est aussi. Mais ce n'est pas le cas : la somme de ces termes vaut 1 !

http://zestedesavoir.com/media/galleries/1996/

Figure 3.1. – Somme de l'inverse des puissances de deux - domaine public - wikicommons

Pour démontrer ce fait, il nous faut étudier ce qu'on appelle les **séries**. Intuitivement, une série est une somme partielle poussée jusqu'au bout d'une suite infinie : on ne se limite pas à additionner les n premiers termes, mais on les additionne tous. Formellement, une série s'obtient en prenant la limite de la somme partielle quand le rang n tend vers l'infini : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

3.1. Convergence et divergence d'une série

Les mathématiciens ont découvert que certaines séries ne donnent pas de résultats finis : soit ce résultat n'existe pas, soit il est infini. Ces séries sont appelées des **séries divergentes**. Mais il s'avère que certaines séries donnent un résultat fini : ces séries sont alors des **séries**

convergentes. Par exemple, Euler a montré que e, la base des logarithmes népériens, est le résultat de la série associée à la suite des inverses des factorielles.

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

Formellement, il faut définir ce qu'on veut dire par série divergente ou convergente :

— s'il n'existe pas de limite pour la série, la série est divergente ;
— sinon, la série converge et on a : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n$.

?

Mais comment savoir qu'une suite est convergente ou divergente ?

3.1.1. Limite du terme général

Prenons la suite géométrique de raison 5 et de premier terme 1. Si on calcule les n premiers termes de la suite et leur somme, voici ce qu'on obtient :

Rang	Suite	Série partielle
0	1	1
1	5	6
2	25	30
3	125	155
4	625	780
5	3125	3905
6	15625	19530
...	...	...

Visiblement, la suite est croissante et les nombres grossissent de plus en plus vite. Intuitivement, on se dit qu'il y a peu de chances qu'elle soit convergente : la valeur des séries partielles a plutôt tendance à augmenter de plus en plus vite avec le nombre de termes. Et en effet, c'est bien le cas : cette suite diverge.

Maintenant, prenons la suite de premier terme 2000, et de raison $1/4$, et regardons sont comportement sur les premiers termes.

Rang	Suite	Série partielle
0	2000	2000
1	500	2500
2	125	2625

3	31,25	2656,25
4	7,8125	2 664,0625
5	1,953125	2 666,01562
6	0,48828125	2 666,50391
…	…	…

On remarque que la série a tendance à se stabiliser autour de 2666. La différence avec la suite précédente, c'est que les termes de la suite tendent de plus en plus vers zéro au fur et à mesure que le rang augmente. Ainsi, des termes de plus en plus négligeables s'ajoutent à la série, ne faisant pas beaucoup varier celle-ci. Ainsi, on sait qu'une suite dont le terme général ne tend pas vers 0 quand le rang tend vers l'infini a une série qui diverge.

?

Mais est-ce ce critère est suffisant pour démontrer qu'une suite converge ?

Et bien il suffit de trouver un contre-exemple pour invalider cette affirmation. Et le contre-exemple n'est pas si difficile à trouver, pour une raison assez simple : on l'a déjà vu précédemment. En effet, prenez la **suite harmonique**, celle formée par l'inverse des nombres entiers naturels non-nuls. Si vous étudiez cette suite, vous verrez que celle-ci tend bien vers zéro quand le rang augmente. Mais qu'en est-il pour sa série ? Est-ce qu'elle diverge ou qu'elle converge ?

Rang	Série harmonique
0	1
1	1,5
100	5,2
1.000	7,5
10.000	9,8
100.000	12,1
…	…

On voit sur cet exemple qu'à chaque fois que l'on multiplie le rang par 10, la série harmonique partielle augmente de 2,3. On peut facilement démontrer cet état de fait, ce que nous ne ferons pas ici. Mais en tout cas, on peut facilement démontrer que cette série diverge !

3.1.2. Autres critères

Visiblement, le fait que le terme général de la suite tende vers zéro n'est pas suffisant pour savoir si une série converge. Pour compléter ce critère, les mathématiciens ont découvert des critères complémentaires et les ont démontré. Parmi ces critères, on pourrait citer :

— la règle de d'Alembert ;
— la règle de Raabe-Duhamel ;
— la règle de Cauchy.

Ces critères sont cependant assez compliqués à illustrer à partir d'exemple, aussi je n'en parlerais pas ici.

3.2. Un exemple : les séries géométriques

Commençons par les séries géométriques. Comme vous l'avez sans doute remarqué, la suite donnée dans l'introduction, de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$, est une série géométrique : celle-ci a pour premier terme 1, et une raison de $\frac{1}{2}$. Et celle-ci converge, ce qui prouve qu'il existe au moins une série géométrique qui converge. Mais cela ne signifie pas que toute série géométrique converge : pour vous donner un exemple, prenez la suite géométrique de premier terme 2000 et de raison 1000 : celle-ci diverge !

3.2.1. Conditions de convergence

On peut se demander quelles sont les conditions requises pour qu'une série géométrique diverge ou converge. Pour comprendre quelles sont ces raisons, on pourrait essayer de regarder des exemples de séries géométriques, afin d'en trouver une loi générale. Mais il faut faire attention à une chose : la convergence va sans doute dépendre des deux paramètres qui définissent la suite géométrique, à savoir le premier terme et la raison. Reste qu'il faudrait vérifier si c'est bien le cas.

3.2.1.1. Et si c'était le premier terme ?

?

Comment vérifier si le premier terme joue un rôle dans les critères de convergence d'une série géométrique ?

Pour cela, on peut utiliser une sorte de protocole assez simple : on prend une série et on manipule le premier terme en gardant la raison constante. Si en modifiant le premier terme, on peut rendre convergente une série initialement divergente (ou inversement), c'est que le premier terme joue un rôle dans la convergence ou divergence d'une série géométrique.

Pour commencer, nous allons prendre une série convergente, celle qui provient de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$, et nous allons tenter de la rendre divergente en modifiant le premier terme. Nous allons essayer avec 5000, $0,5$, $-0,5$, et -5000. Et comme le montre le tableau ci-dessous, pas moyen de rendre la série divergente. Vous pouvez essayer vous-même en prenant n'importe quelle série convergente, en choisissant les premier termes de votre choix : cela donnera le même résultat.

Rang	5000	0,5	-5000	- 0,5

1	5000	0,5	-5000	-0,5
2	7500	0,75	-7500	-0,75
3	7750	0,775	-7750	-0,775
4	8375	0,8375	-8375	-0,8375
5	8687,5	0,86875	-8687,5	-0,86875
6	8843,75	0,884375	-8843,75	-0,884375
7	8921,875	0,8921875	-8921,875	-0,8921875
8	8960,9375	0,89609375	-8960,9375	-0,89609375
9	8980.46875	0,898046875	-8980.46875	-0,898046875
10	8990.234375	0,8990234375	-8990.234375	-0,8990234375

Maintenant, prenons une série divergente et essayons de la rendre convergente en changeant uniquement le premier terme. Par exemple, prenez une série de raison 2 quelconque qui diverge et changez son premier terme. Essayez de trouver une valeur qui rende cette série convergente.

? Ça y est, vous avez trouvé ?

Et oui, il suffit de mettre le premier terme à zéro pour rendre convergente n'importe quelle série géométrique divergente. Par contre, tous les essais avec une autre valeur ne donneront rien de crédible : hormis l'exception du zéro, le premier terme ne semble pas avoir de rôle à jouer dans la convergence d'une série géométrique.

3.2.1.2. J'avais raison !

Maintenant, il nous reste à étudier l'influence de la raison sur la convergence ou divergence d'une série, et regarder quelles sont les conditions que doit respecter cette raison pour que la série converge. Pour cela, nous allons prendre une suite, fixer son premier terme, et regarder ce qui se passe quand on fait varier la raison. Nous allons prendre les suites de premier terme 2, qui ont les raisons $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 7, et -5.

Rang	**7**	**0,5**	**-5**	**- 0,5**
1	2	2	2	2
2	14	1	-10	-1
3	98	0,5	50	0,5
4	686	0,25	-250	-0,25
5	4802	0,125	1250	0,125

6	33614	0,0625	-6250	-0,0625
7	235298	0,03125	31250	0,03125
8	1647086	0,015625	-156250	-0,015625
9	11529602	0,0078125	781250	0,0078125
10	80707214	0,00390625	-3906250	-0,00390625

On s'aperçoit que le fait que la raison soit positive ou négative ne change rien : dans les exemples du dessus, il existe une série de raison positive qui converge et une autre qui diverge (même chose avec la raison négative). Par contre, il semblerait que la valeur de la raison joue un rôle.

Pour comprendre quel est ce rôle, il faut se rappeler qu'une série convergente provient d'une suite dont le terme général tend vers zéro avec le rang. Il faut que la raison le permette si on veut que la série géométrique converge : c'est une condition nécessaire, mais pas suffisante. Avec un peu de réflexion, on se rend rapidement compte que ce n'est possible que si la raison de la suite est comprise entre -1 et 1.

Prenons le cas où la raison est positive. Si elle est comprise entre zéro et 1, la valeur absolue de chaque terme deviendra plus petit au fur et à mesure que le rang augmente : la suite tend vers zéro assez rapidement. Et dans ce cas, cela suffit à rendre la série convergente. Mais si la raison dépasse 1, la suite sera croissante (premier terme positif) ou décroissante (premier terme négatif) et tendra vers l'infini : la série fera donc de même. Si la raison vaut 1, on se retrouve avec une suite constante, dont on se doute rapidement qu'elle diverge.

Si la raison est négative, les choses changent un peu : les signes des termes alternent. Par exemple, si la raison est de -1, la suite formée sera u_0, $-u_0$, u_0, $-u_0$, u_0, $-u_0$, u_0, $-u_0$, u_0, $-u_0$, etc. Dans ces conditions, difficile de donner une limite à cette somme, qui diverge donc. Il faut avouer que c'est une forme de divergence assez spécial : il n'y a pas de limite, même infinie. Si la raison est inférieure à -1, la même chose se produit avec des termes qui deviennent de plus en plus grands, et nos expériences montrerons que ces séries divergent. Mais si la raison est comprise entre -1 et 0, les choses changent : les termes tendent vers zéro, et cela suffit à rendre la série convergente.

3.2.2. Limite d'une série géométrique convergente

Maintenant que l'on sait quelles sont les séries géométriques convergentes, on peut se demander s'il existe un moyen de calculer leur limite. Pour cela, il existe une formule assez générale, que nous allons introduire par quelques exemples.

3.2.2.1. Exemple

Prenons la suite géométrique de premier terme 7 et de raison $\frac{1}{5}$:

$$S = 7 + \frac{7}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{7}{5^3} + ...$$

Multiplions cette suite par sa raison :

$$\frac{1}{5} \times S = \frac{7}{5} + \frac{7}{5^2} + \frac{7}{5^3} + ...$$

On peut remarquer que $S = 7 + \frac{1}{5} \times S$, ce qui donne :

$$S - (\frac{1}{5} \times S) = 7$$

Et cette formule permet d'obtenir, après quelques manipulations algébriques, que $S = \frac{35}{4}$.

3.2.2.2. Formule générale

Dans les exemples vus plus haut, nous avons pris une série géométrique, l'avons multiplié par sa raison, et soustrait ce résultat de la série : à chaque fois nous sommes tombé sur le premier terme. Pour comprendre pourquoi, nous allons devoir prendre la forme générale d'une série géométrique, à savoir :

$$S = u_0 + (u_0 \times r) + (u_0 \times r^1) + (u_0 \times r^2) + (u_0 \times r^3) + (u_0 \times r^4) + ...$$

On a alors :

$$S \times r = (u_0 \times r) + (u_0 \times r^1) + (u_0 \times r^2) + (u_0 \times r^3) + (u_0 \times r^4) + ...$$

La soustraction $S - (S \times r)$ donne alors :

$$S - (S \times r) = u_0$$

$$S \times (1 - r) = u_0$$

$$S = \frac{u_0}{1 - r}$$

3.2.2.3. Une autre démonstration

Pour effectuer une démonstration plus rigoureuse, il faut reprendre la formule de la somme partielle d'une suite géométrique et en calculer la série en passant à la limite :

$$S = u_0 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Dans cette formule, seul le terme r^n dépend de n, et c'est son comportement qui permettra à la suite de converger ou de diverger. Si jamais ce terme diverge, alors la suite diverge aussi. Par contre, s'il tend vers zéro, la suite se simplifie et la série converge vers la valeur calculée par la formule suivante :

$$S = u_0 \times \frac{1}{1 - r}$$

3.3. Un autre exemple : les séries de Riemann

Maintenant, nous allons étudier une autre forme de série : les **séries de Riemann**. Ces séries sont celles obtenues avec des suites de la forme $u_n = \frac{1}{n^r}$. Le coefficient r est ce qu'on appelle la raison de la suite, par analogie avec les suites géométriques. Dans ce qui va suivre, nous allons étudier la convergence de ces séries.

3.3.1. Série harmonique

La série de puissance la plus connue est la **série harmonique**, qui dérive de la suite de l'inverse des nombres entiers (cette suite est appelée la suite harmonique :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$

Il se trouve que les termes de cette suite tendent vers zéro quand le rang augmente, ce qui ne l'empêche pas de diverger !

Pour s'en rendre compte, il suffit de comparer la suite harmonique avec une autre suite qui diverge. Prenons la suite suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + ...$$

Or, il se trouve que si l'on compare les termes de cette suite à la suite harmonique, on trouve que tout terme de rang n de la suite harmonique est supérieur au terme de même rang dans la suite vue plus haut. En clair : si la série de la suite prise en exemple diverge, alors la série harmonique diverge.

Et évidemment, la suite prise en exemple diverge, le meilleur moyen de s'en rendre compte étant de regrouper les termes identiques entre parenthèses. Cela donne une suite quasi-constante, qui diverge donc.

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + ...$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

3.3.2. Série de l'inverse des carrés

Maintenant, essayons la **série de l'inverse des carrés**, qui vaut $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ...$. Cela peut paraitre bizarre, mais celle-ci converge vers une valeur assez intéressante : $\frac{\pi^2}{6}$! La démonstration de cette formule est un peu compliquée, aussi je suis obligé de vous la faire admettre. Le premier mathématicien a avoir découvert cette relation était Euler, un grand mathématicien du 17ème siècle. D'autres démonstrations sont aujourd'hui connues.

3.3.3. Cas général

Comme on le voit, les séries de Riemann peuvent aussi bien converger que diverger. Mais alors comment savoir si une telle série diverge ou converge ? Les mathématiciens ont depuis longtemps établit un théorème qui dit que la raison (la valeur de la puissance) doit rester en-dessous de 1 pour que la série converge.

3.4. Amusons-nous avec les séries divergentes

Dans ce que l'on a vu précédemment, les séries avaient souvent des termes qui étaient soit tous positifs, soit tous négatifs, les séries géométriques de raison négative étant les seules à faire exception. Il arrive souvent que certaines suites comprennent aussi bien des termes négatifs que positifs. Un bon exemple est celui des **suites alternées**, où tout terme positif est suivi d'un terme négatif, et réciproquement. Et il se trouve que certaines suites de ce genre (avec termes positifs et négatifs, mais pas forcément alternées) ont des comportements bizarres vis à vis de la convergence.

3.4.1. Quand l'addition n'est plus fiable

Pour comprendre quel est le problème, il faut faire un petit rappel sur l'addition. D'ordinaire, l'addition définie pour deux nombres est considérée comme insensible à l'ordre : peut importe l'ordre dans lequel on additionne un paquet de nombres réels, le résultat sera le même (en clair, l'addition est associative, commutative et distributive). Cela marche très bien quand on additionne un nombre fini de nombres. Mais quand on additionne un nombre infinis de termes, c'est autre chose.

Par exemple, prenons la suite alternée suivante :

$$A, -A, A, -A, A, -A, A, -A, A, -A, A, -A, A, -A, ...$$

On peut effectuer l'addition en regroupant deux termes consécutifs : les termes de rang pairs sont additionnés avec les termes de rang impairs. On obtient alors :

$$S = (A - A) + (A - A) + (A - A) + (A - A) + ...$$

$$S = (0) + (0) + (0) + (0) + ...$$

Maintenant, changeons l'ordre en décalant les parenthèses d'un cran et effectuons le calcul suivant :

$$S = A + (-A + A) + (-A + A) + (-A + A) + (-A + A) + (-A + A) + ...$$

$$S = A + (0) + (0) + (0) + (0) + ...$$

Le résultat n'est pas le même. C'est ainsi : quand on additionne une infinité de nombre, l'ordre de l'addition peut tout changer (dit autrement, on perd l'associativité et la distributivité). Néanmoins, cela n'arrive pas pour toutes les suites. Par exemple, les suites géométriques, harmoniques, et autres ne sont pas concernées. Les mathématiciens ont réussit à trouver que ce comportement n'arrive que dans certaines conditions bien précises, seules certaines suites étant concernées.

3.4.2. Conditions d'apparition du phénomène

Pour commencer, les suites dont tous les termes sont des réels positifs ne sont pas concernées : leur série converge systématiquement vers la même valeur quelque soit l'ordre d'addition. Même chose pour les suites dont tous les termes sont négatifs : si elles convergent, elles donnent toujours la même valeur quelque soit l'ordre d'addition. On peut généraliser cette résistance au changement d'ordre d'addition aux suites réelles qui possèdent la propriété dite de **convergence absolue**. Une suite de termes général u_n est absolument convergente si $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. En clair, si on transforme les termes négatifs en termes positifs, la suite obtenue doit converger.

Par contre, certaines suites sont convergentes, mais ne respectent pas la convergence absolue : on parle de **convergence conditionnelle**. Pas besoin d'aller chercher très loin pour trouver une telle suite : la suite harmonique alternée en est un bon exemple. En effet, si on prend la valeur absolue de tous les termes, on retombe sur la suite harmonique, qui diverge.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$$

Ces suites conditionnellement convergentes sont celles pour lesquelles le changement de l'ordre d'addition modifie la valeur de la série. Un théorème, le **théorème de réarrangement de**

Riemann, dit que l'on peut changer l'ordre d'addition des termes de la suite de manière à obtenir n'importe quelle limite : une telle suite peut converger vers n'importe quoi, voire même diverger si l'on effectue l'addition comme il faut.

3.4.3. Méthodes de sommation

Devant ce comportement, les mathématiciens ont inventé diverses **méthodes de sommation**, qui indiquent comment faire l'addition d'une infinité de nombres. On peut ainsi citer la méthode de Cesaro ou encore la méthode d'Abel. C'est ainsi que certains arrivent à faire croire que la suite harmonique converge vers $-\frac{1}{12}$: ils utilisent une méthode de sommation différente de l'addition usuelle.

Mais ces méthodes doivent respecter quelques critères pour être considérées comme valides :

— elles doivent redonner le même résultat que l'addition usuelle pour les suites absolument convergentes : c'est le critère de **régularité** ;
— si cette méthode donne une valeur A à la série (a_n) et B à la série (b_n), alors elle doit donner la valeur $\lambda A + B$ à la série de terme $\lambda a_n + b_n$: c'est la condition de linéarité ;
— si on sort les n premiers termes et qu'on les additionne avec la méthode usuelle, la méthode de sommation doit donner un résultat amputé de la somme de ces n premiers termes : c'est la condition de **stabilité**.

Et voilà, cette introduction aux suites et séries est terminée. Et vu qu'il s'agit d'une introduction, il vous reste encore beaucoup à apprendre sur le sujet. Afin de parfaire votre apprentissage, nous vous proposons de consulter les liens suivant,s qui parlent des suites et des séries. La plupart pointe vers des articles de vulgarisation.

— Les mystères arithmétiques de la suite de Fibonnaci ;
— sur la suite de Syracuse : Le problème 3n+1 : élémentaire mais redoutable 1 2 et 3 ;
— Sur les liens entre nombres premiers et suites arithmétiques ;
— Le scandale des séries divergentes ;
— Pikachu et séries de Fourier .

L'auteur Mewtow tient à remercier Micmaths pour les conseils qu'il lui a prodigués, et tous les auteurs s'associent pour remercier les validateurs et relecteurs pour leur travail.

Le Logo du tutoriel a été dessiné par Johannes Rössel, et mis à disposition sous domaine public sur wikicommons .